文章编号: 1000-3630(2000)03-152-02

声传播研究中拉格朗日法与欧拉法的区别

樊　斌
(苏州铁道师范学院, 苏州　215009)

中图分类号: O422　　　文献标识码: A

The distinction between Lagrangian description and Euler description in research of sound propagation

FAN Bin
(Suzhou railway teachers college, Suzhou 215009, China)

1　引　言

在描述流体运动状态时有两种方法: 拉格朗日和欧拉描述。拉格朗日描述着眼于流体中某一体元, 研究该体元在运动中的性质; 欧拉描述着眼于空间某一固定点, 研究某一时刻通过该固定点的流体的性质。在一维运动中, 拉格朗日描述将初始位置为 x_0 的体元在时刻 t 的位移 x、速度 u、密度 ρ 均写为 t 和 x_0 的函数; 欧拉描述将表征流体性质的各量都写成固定点 x 和时间 t 函数。一般的研究流体力学问题采用欧拉描述, 研究声学问题采用拉格朗日描述。

在均匀流体中当体元速度及声压很小时, 欧拉描述与拉格朗日描述之间的差别可以忽略, 对于较大的速度及声压值, 这两种描述之间的差别不可忽略[1]。本文首先研究了流体运动速度在两种描述中表达式之间的关系, 并进一步将这个关系应用到一维有限振幅声波的传播中, 推导出欧拉描述中区别于拉格朗日描述中的声传播的非线性项。

2　简谐声波中的振动速度表达式

2.1　拉格朗日描述

假设有一角频率为 ω 的一维正弦声波以速度 c 沿正 x 方向传播, 则在该波所传播到的空间各体元均以 ω 频率作等振幅正弦振动。在拉格朗日描述中, 我们研究初始平衡状态位于 x_0 的体元, 设在时刻 t 该体元的位置为 x, 则该体元的位移可写为:

$$x - x_0 = A\sin(\omega t - kx_0)$$

其中 A 为体元的位移振幅, $k=\omega/c$, 在拉格朗日描述中速度表达式为:

$$v(x_0、t) = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \omega A\cos(\omega t - kx_0) \tag{1}$$

2.2　欧拉描述

在欧拉描述中, 我们研究流体通过某一固定点 x 时的性质。在各体元的振动过程中, 初始平衡位置位于 x 点附近 $x\pm A$ 范围内的所有体元振动中都能经过 x 点。假设在 t 时刻恰好经过点的体元其初始平衡位置为 x_0, 对于该体元有:

$$x - x_0 = A\sin(\omega t - kx_0) \tag{2}$$

由于在不同时刻通过固定点 x 的体元是不同的, 所以(2)式中 x 是参变量, t 是自变量, x_0 是因变量。显然(2)式是因变量 x_0 的一个隐函数式。我们经过如下变换来求出 $x_0(x、t)$ 的显函数式:

设: $z_0 = ct - x_0,\quad z = ct - x$

则(2)式变换为: $z = z_0 - A\sin(kz_0)$

再设: $s = x - x_0 = A\sin(kz_0)$

我们有:

$$s = A\sin[k(z+s)] \tag{3}$$

(3)式为 s 的隐函数方程, 根据文献[2]报道, 该类型方程有解析解:

$$s = \sum 2/(nk)\,\mathrm{J}_n(nkA)\sin(nkz)$$

将上式中 s、z、z_0 变换回 x、x_0, 我们有:

$$x_0 = x - \sum 2/(nk)\,\mathrm{J}_n(nkA)\sin[n(\omega t - kx)] \tag{4}$$

所以我们可以得到, 在时刻 t 通过固定点 x 的体元其初始平衡位置可以由公式(4)算出。

欧拉描述中, 在时刻 t, x 点的流体振动速度即为此刻通过该点的那部分体元的振动速度, 设该体

收稿日期: 2000-01-21; 修订时期: 2000-05-15
作者简介: 樊斌(1964-), 男, 副教授。

元的初始位置为 x_0, 其振动速度遵从(1)式, 我们利用(4)式将(1)式中的速度对 x_0、t 的依赖关系换成对 x、t 的依赖关系, 即可得到欧拉描述中的速度表达式, 有:

$$v(x,t) = \omega A\cos[\omega t - kx_0(x,t)] = \omega A\cos\{\omega t - k[x - \sum 2/(nk)\mathrm{J}_n(nkA)\sin(n\omega t - nkx)]\} \quad (5)$$

3 两种描述中声传播二阶项表达式

3.1 拉格朗日描述

假设在 $x=0$ 处有一有限振幅波沿 $+x$ 方向传播, 对速度表达式有边界条件:

$$u(0,t) = u_0\sin\omega t \quad (6)$$

在拉格朗日描述中波的传播遵循如下公式[3]:

$$u(x_0,t) = u_0\sin[\omega t - kx_0 + (r+1)/(2c_0)\omega x_0 u] \quad (7)$$

其中, u 为初始位置为 x_0 的体元在 t 时刻的振动速度, r 为定压比热于定容比热之比, c_0 为小振幅声速。与原公式相比, x 加了下标"0", 表示原公式中的 x 是体元初始平衡位置, 以下亦同。

在声传播出现间断以前, (7)式有解析解(即 Bessel-Fubini 解)[2]:

$$u(x_0,t) = \sum 2\mathrm{J}_n(n\sigma)/(n\sigma)\sin(n\omega t - knx_0)$$

式中 $\sigma=(r+1)\omega x_0 u_0/2$。将上式取前两项并将贝塞尔函数展开取近似, 有:

$$u(x_0,t) = u_0\sin(\omega t - kx_0) + u_0^2/(4c)(1+r)kx_0\sin 2(\omega t - kx_0) \quad (8)$$

3.2 欧拉描述

首先将(4)式中高次项忽略并将贝塞尔函数展开, 有:

$$x_0 = x - 2[\mathrm{J}_1(kA)\sin(\omega t - kx)]/k = x - A\sin(\omega t - kx) \quad (9)$$

在欧拉描述中, 若 t 时刻通过固定点 x 的体元初始位置为 x_0, 则该点的欧拉速度即为该体元的振动速度, 而体元的振动速度满足(7)式, 所以将(7)式中的 x_0 用(9)式换成 x, 即可得到 x 点的欧拉速度:

$$u(x,t) = u_0\sin\{\omega t - kx + kA\sin(\omega t - kx) + (r+1)\omega xu/2\} \quad (10)$$

(10)式中忽略了代换时的高阶项。

由于在单频声传播出现间断以前声波畸变不是很厉害, 所以将(10)式三角函数相位中出现的 u 近似地取为 $u_0\sin(\omega t - kx)$, 则 A 可近似地写为 u_0/ω, 代入(10)式可化为:

$$u(x,t) = u_0\sin\{\omega t - kx + u_0/(2c_0)[2+(1+r)kx]\sin(\omega t - kx)\} \quad (11)$$

利用三角函数变换, 在一定近似下(11)式可化为:

$$u(x,t) = u_0\sin(\omega t - kx) + u_0^2/(4c_0)[2+(1+r)kx]\sin 2(\omega t - kt) \quad (12)$$

4 结 论

在研究小振幅声波的传播时, 欧拉描述与拉格朗日描述之间的差别可以忽略。但对于一维有限振幅声波的传播, 将(8)、(12)两式进行比较, 可得出如下结论: 考虑到二阶项, 在间断距离之前, 欧拉描述和拉格朗日描述中, 关于声波的振动速度的表达式是不一样的。(12)式的二阶项振幅比(9)式的多了一项 $u_0^2/(2c_0)$, 这一项就是在二级近似下, 欧拉描述与拉格朗日描述在处理声传播问题时的区别。关于这一项, 我们可以进行如下讨论:

(1) 该项与声源的频率及声传播的距离无关(在二级近似下);

(2) 该项与声传播产生的二阶项相比, 频率愈低, 离声源愈近, 该项显得尤为重要。

参考文献:

[1] P.M.莫尔斯. 理论声学(上册)[M]. 北京: 科学出版社, 1984: 281.

[2] O·V·Rudenko, S·I·Soluyan, Theoretical foundations of nonlinear acoustics[M]. Consultants Bureau, 1977: 30.

[3] 马大猷. 高声强: I. 基础[J], 声学学报, 1992, 17: 241.

"超声手册"出版发行

由中国科协主席周光召院士作序, 南京大学冯若教授主编的我国第一本《超声手册》于 1999 年 10 月由南京大学出版社出版发行。该书分超声物理基础, 超声工程材料, 超声换能器, 超声检测, 声表面波、声体波与声光器件, 功率超声, 医学超声, 水声技术, 超声测量与标准化等 9 章和附录。全书计 184.3 万字(另 20 插页), 售价 105 元。16 名编著人中都是我国长期从事第一线超声研究、教学工作的专家教授。

本刊讯