文章编号: 1000-3630(2000)03-154-02

变形 Boussinesq 方程的双孤子解

陈黎丽
(宁波大学物理系，宁波 315211)

中图分类号：O422.7　　文献标识码：A

Two soliton solution of the variant Boussinesq equation

CHEN Li-li
(Department of Physics. Ningbo University, Ningbo 315211, China)

1 引 言

由于线性物理正日益完善及自然现象本质上是非线性的，非线性物理的研究正吸引着越来越多科学家的注意力。为了求解非线性物理问题，人们需要建立各种各样的方法。在线性物理中，傅里叶变换和分离变量法是两种强有力的方法，反散射方法[1]正是傅里叶变换在非线性物理学中的推广，然而分离变量法在非线性物理学中的应用一直没有得到令人满意的推广。近几年来，人们利用对称性约束(或称 Lax 对的非线性化)方法建立了形式变量分离方法[2-4]。通常该方法用来求单孤子解，本文利用形式变量分离方法来寻求变形 Boussinesq 方程[5]的双孤子解。

2 形式变量分离方法

一般的 n 维 N 阶偏微分矩阵方程为：

$$F(u, u_{x_i}, u_{x_ix_j}, \cdots, u_{x_{i1}x_{i2}\cdots x_{in}}) \equiv F(u) = 0 \quad (1)$$

为了得到一些精确解，首先引入一组形式变量分离方程：

$$\Psi_{x_i} = K_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, n \quad (2)$$

其中 $u \equiv (u_1, u_2, \cdots, u_M)^T$, $F \equiv (F_1, F_2, \cdots, F_M)^T$, $\Psi \equiv (\Psi_1, \Psi_2, \cdots \Psi_p)^T$ 和 $K_i \equiv (K_{i1}, K_{i2}, \cdots K_{ip})^T$ 是列矩阵函数，且 $K_i = K_i(\Psi)$ 是 Ψ 的函数，$\Psi = \Psi(x_i)$ 是 x_i 的函数。(2)式的相容性条件 $\Psi_{x_ix_j} = \Psi_{x_jx_i}$ 要求矩阵函数 K_i 是互相可交换的，即：

$$[K_i, K_j] \equiv K_i' K_j - K_j' K_i \equiv \frac{\partial}{\partial \epsilon}[K_i(\Psi + \epsilon K_j) - K_j(\Psi + \epsilon K_i)]\big|_{\epsilon=0} = 0, \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n \quad (3)$$

虽然 Ψ 仍然可以是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数，但(2)式中的每一个方程都只明显依赖于一个独立变量。当 K_i 被取定后，剩下问题就是确定 u 和 Ψ 之间的关系

$$u = U(\Psi) \quad (4)$$

U 的具体形式可通过(2)、(4)式代入(1)式决定。

在一般情况下，为了给出一些特殊的精确解，寻找一些合适的 K_i 和 U 是比较困难的。为具体起见，我们来处理一个简单的物理模型。

3 变形 Boussinesq 方程的双孤子解

变形 Boussinesq 方程为：

$$v_t + a(uv)_x + bu_{xxx} = 0 \quad (5)$$

$$u_t + fv_x + auu_x = 0 \quad (6)$$

其中 a, b, f 为常数，是描述水波的一个较为通用的模型，其中 $u(x,t)$ 是速度，$v(x,t)$ 是偏离平衡位置的高度。它的一些单孤子解已经被求出[5]，这里应用上节提出的形式变量分离法得到它的双孤子解。

在(2)式中取 $p = 2$，则形式变量分离方程为：

$$\Psi_x = \begin{pmatrix} \Psi_{1x} \\ \Psi_{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} \\ K_{12} \end{pmatrix}, \quad \Psi_t = \begin{pmatrix} \Psi_{1t} \\ \Psi_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{21} \\ K_{22} \end{pmatrix} \quad (7)$$

其中 $\Psi_1 = \Psi_1(x,t)$、$\Psi_2 = \Psi_2(x,t)$ 是 x、t 的函数，$K_{1p} = K_{1p}(\Psi)$, $K_{2p} = K_{2p}(\Psi)$, $p = 1, 2$ 是 Ψ 的函数。相容性条件 $[K_1, K_2] = 0$ 的一种简单形式的解为：

$$K_{21} = \omega_1 K_{11}, \quad K_{22} = \omega_2 K_{12} \quad (8)$$

其中 ω_1、ω_2 是常数。函数 K_{11}、K_{12}、U 和 V 由(4)、(7)、(8)式及 $v = V(\Psi)$ 代入(5)、(6)式确定。

在实际应用中，可先任意选定合适的 K_{11}、K_{12}，例如，可选取 K_{11}、K_{12} 分别为 Ψ_1、Ψ_2 的多项式函数：

收稿日期: 2000-01-21; 修订日期: 2000-05-15
国家自然科学基金(批准号: 19975025)资助的课题
作者简介: 陈黎丽(1962-)，女，副教授。

$$K_{11}=\sum_{j=0}^{J}A_j\Psi^j,\quad K_{12}=\sum_{n=0}^{N}B_n\Psi^n \tag{9}$$

为简单, 这里选择:

$$K_{11}=A_1\Psi_1,\quad K_{12}=B_1\Psi_2 \tag{10}$$

并取

$$U=A[\ln(1+\Psi_1+\Psi_2+c\Psi_1\Psi_2)]_x+F \tag{11}$$

$$V=B[\ln(1+\Psi_1+\Psi_2+c\Psi_1\Psi_2)]_{xx}+G[\ln(1+\Psi_1+\Psi_2+c\Psi_1\Psi_2)]_x+H \tag{12}$$

由(7)、(8)、(10)式得 Ψ 的一般解为:

$$\Psi_1=\exp[A_1(x+\omega_1 t+x_1)] \tag{13}$$

$$\Psi_2=\exp[B_1(x+\omega_2 t+x_2)] \tag{14}$$

其中 x_1、x_2 为任意常数。将(11)、(12)、(13)、(14)式代入(5)、(6)式求出 Ψ_1、Ψ_2、U、V 的展开系数, 即可得到变形 Boussinesq 方程的双孤子解:

$$u=\pm\frac{2\sqrt{bf}}{a}\left[\frac{A_1\exp(A_1\xi_1)+B_1\exp(B_1\xi_2)}{1+\exp(A_1\xi_1)+\exp(B_1\xi_2)}\right]-\frac{\omega_1\pm\sqrt{bf}A_1}{a} \tag{15}$$

$$v=\frac{2b}{a}\left\{-\left[\frac{A_1\exp(A_1\xi_1)+B_1\exp(B_1\xi_2)}{1+\exp(A_1\xi_1)+\exp(B_1\xi_2)}\right]^2+\frac{A_1^2\exp(A_1\xi_1)+B_1^2\exp(B_1\xi_2)}{1+\exp(A_1\xi_1)+\exp(B_1\xi_2)}\right\} \tag{16}$$

其中 $\xi_1=x+\omega_1 t+x_1$, $\xi_2=x+\omega_2 t+x_2$, $\omega_2=\omega_1\pm\sqrt{bf}(A_1-B_1)$, ω_1、A_1、B_1 为任意常数。

4 结 语

在线性物理中常用的分离变量法, 虽然还没有直接推广到非线性物理中, 形式变量分离方法可能是一种很好的间接推广。通常形式变量分离方法用来求单孤子解, 本文中我们用形式变量分离方法得到了变形 Boussineq 方程的双孤子解。实际上应用本文的方法, 任意数目的多孤子解都可以得到, 本文不再作深入的讨论。

作者感谢楼森岳教授的有益讨论。

参考文献:

[1] M. J. Ablowitz and P. A. Clarkson, Solitons. Nonlinear evolution equations and inverse scattering transformations[C]. London Mathematical Society Lecture Note series 149, Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

[2] L. L. Chen and S. Y. Lou. Explicit solutions of the KdV-Burgers and Modified KdV-Burgers equations with background interactions[J]. Acta Physics Sinica, 1999, 8: S285-S288.

[3] Y. B. Zeng. An approach to the deduction of the finite-dimensional integrability from the infinite-dimensional integrability[J]. Phys. Lett., 1991, A160: 541-547.

[4] Y. Chen and Y. S. Li. The constraint of the Kadomtsev-Petviashvili equation[J]. Phys. lett., 1991, A157: 22-26.

[5] Z. Y. Yan and H. Q. Zhang. New explicit and exact travelling wave solutions for a system of variant Boussinesq equations in mathematical physics[J]. Phys. lett, 1999, A252: 291-296.

电声专家曹梅杰高级工程师逝世

国际电联 ITU-T 12 研究组主席、信息产业部电信科学技术第一研究所数字终端研究室主任、硕士生导师、上海通讯学会秘书长, 中国声学学会理事、本刊编委曹梅杰高级工程师(教授级), 因患胰腺癌, 医治无效, 于 2000 年 5 月 13 日逝世, 终年 58 岁。

曹梅杰同志从事电声科研和培养人才工作 36 年, 他一生奋力进取, 取得了不少丰硕成果, 先后在国内外发表论文 100 多篇, 并多次代表我国向 CCITT 提交了相关文稿和建议书, 他和英国电信研究所合作研究的 ISDN 数字电话机测试方法, 被采纳为欧洲电信标准, 后被纳入 CCITT 建议书, 提高了我国在国际电信中的地位, 为国争了光。他还多次评为院、局先进工作者, 享受国家政府特殊津贴待遇。

他的勤奋治学和努力向上的创业精神, 将永远留在我们的心间, 2000 年 5 月 19 日, 我们怀着沉痛心情送别了一代英才。

本刊编辑部