

二维涡斑的运动发声

刘晓宙, 刘应中, 缪国平, 唐春权

(上海交通大学船舶与海洋工程学院, 上海 200030)

摘要: 本文通过对 Navier-Stokes 方程的直接数值模拟, 并应用涡斑模型, 研究了方腔内二维涡斑运动发声问题, 结果表明旋转方向相同的涡斑, 不管初始涡斑的涡量分布如何, 最后的涡量分布为 Burgers 型涡斑, 呈现单胞的稳定结构; 旋转方向相反的涡斑, 其运动演化轨迹与初始条件有关, 最终呈双胞的稳定结构。

关键词: 涡斑; 稳定结构; 融合

中图分类号: O351.3, O357.1 文献标识码: A

Sound generation from the motion of two-dimensional vortex patches

LIU Xiao-zhou, LIU Ying-zhong, MIAO Guo-ping, TANG Chun-quan

(School of Naval Architecture and Ocean Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

Abstract: Using the model of vortex patch, sound generation from the motion of two-dimensional vortex patches in square is studied through Navier-Stokes equations. The results show that no matter how the initial distribution of vorticity with same revolving direction is, the final vorticity distribution is that of Burgers vortex with single cell, having stable structure. However, the vortex patches with opposite revolving direction have the stable structure with two cells and their evolution is dependent on the initial condition.

Key words: vortex patches; stable structure; merge

1 引言

自从 Lighthill 提出气动声学理论, Powell 指出低马赫数下声来自不定常的涡运动以来, 涡声理论得到很大的发展, 人们认识到旋涡是构成湍流和诱发噪声的重要因素, 研究涡声理论对激流噪声的控制和消声理论的发展具有重要意义。唐^[1]等研究了自由空间无粘流体域中一对二维涡的声辐射。缪等对圆柱外的点涡系的低马赫数运动发声作了比较系统的研究, 发现当点涡数目达到 3 个或 3 个以上, 且都沿周向均布于一个与圆柱同轴的圆形轨道上时, 涡系运动激发的外场声辐射将消失。以上的研究都基于理想流体, 然而理想流体中的二维点涡系统是一种理想化的模型, 实际粘性流体中的涡是有核的涡系统(涡斑), 在核内部涡量按某种规律分布。运动过程中在不同条件下它们或者作刚性旋转, 或者相互盘绕或融合。本文研究两个和多个二维涡斑在无界域中的运动发声, 在计算涡斑的运动和涡量演变时考虑到粘性的影响。研究它们的发声规律时, 为了简单起见, 对于得出的涡量分布则忽略粘性效应, 仍从 Powell 方程入手, 利用远近场匹配渐近得到的结果。文中给出了二维粘性涡斑的运动和涡

量的演变过程, 和与之相应的声压随时间的变化, 声强、频谱及指向性随距离的变化。结果表明: 涡斑的声辐射与涡斑的运动状态有关, 涡斑在融合阶段声辐射较大, 涡斑的发声呈四极子的特点, 三涡斑系统和四涡斑系统的声压振幅小于两涡斑系统, 涡斑的声辐射体现了涡斑之间的相互作用。

2 声场计算

前面已经指出, 本文的声场计算是建立在 Powell 方程和内外场渐近匹配的基础上。按涡声理论, 在不考虑质量力和流体粘性、等熵绝热、低马赫数下, 整个声场的控制方程为 Powell 方程:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p = 0 \quad (u) \quad (1)$$

其中: c_0 为声速, p 为声压, ρ_0 为流体平均密度, ω 为涡量, u 为流体质点速度。由方程(1)可见, Lamb 矢量($L = \nabla \times u$)是流动噪声的起源。我们讨论的涡斑是紧致的, 只占据有限的空间, 因此可将整个流场分为内场和外场, 即有旋的涡斑声源场和远处的辐射场, 并利用匹配渐近展开法进行分析。在紧致的涡斑附近(内场), 问题的几何尺度 L 小, $L/c_0 T \ll 1$, T 是问题中的特征时间, 若取为声波周期, 则 $c_0 T$ 是声波波长, 于是方程(1)中的第一项可以忽略, 退化为 Poisson 方程:

收稿日期: 2000-01-22; 修回日期: 2000-07-12

国防水动力学基金资助项目(14.2.3.2)

作者简介: 刘晓宙(1966), 男, 江苏南通人, 博士后。

$${}^2 p_1 = - 0 \quad (u) \quad (2)$$

p_1 为内场中的压力脉动。这个结果相当于流体是不可压缩的。外场的声场中不存在涡量, (1) 式退化为齐次波动方程:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_0}{\partial t^2} - \Delta p_0 = 0 \quad (3)$$

其中: p_0 代表声场中的压力脉动即声压。在内域不存在边界(自由空间)的条件下, 内解与外解进行匹配, 经过一些近似后得:

$$p_0(x, t) = \frac{0}{2} \frac{x_i}{c_0 R} \cosh(\dots) \left[t - \frac{R}{c_0} \cosh(\dots) \right] + \frac{0}{2} \frac{x_i x_j}{c_0^2 R^3} \cosh(\dots) Q_i \left[t - \frac{R}{c_0} \cosh(\dots) \right] + \frac{0}{2} \frac{x_i x_j}{c_0^2 R^2} \cosh^2(\dots) Q_i \left[t - \frac{R}{c_0} \cosh(\dots) \right] \quad (4)$$

R 为 $x_1 x_2$ 平面的观察点与原点的距离, (x_i, x_j) 为观察点的坐标。 (4) 式右边第一项为偶极子项的贡献, 后两项为四极子项的贡献。其中:

$$i(t) = (-1)^y (y, t) dy$$

$$Q_{ij}(t) = \frac{1}{2} y_i [y_j (y, t)]_j dy$$

$i=1$ 时, $=2$; $i=2$ 时, $=1$ 。由于 $t^* = t - \frac{x}{c_0} \cosh(\dots) > 0$, 因此积分变量有限, 保证积分收敛。由 $i(t)$ 和 $Q_{ij}(t)$ 的表达式可见, 内场的涡量通过它们反映出来。根据内场的涡量得到 $i(t)$ 和 $Q_{ij}(t)$, 然后按 (4) 计算得到外场声压 $p_0(x, t)$, 再由外场声压计算声强, 进行谱分析可得声压的频谱。采用高斯积分法, 计算声压的时间步长取为 0.01s。

3 运动方程及计算方法

由上一节的讨论可知, 要探讨涡斑的声学特性, 需要知道自由空间的内场中涡斑的演化, 而内场的流体可看作是不可压缩的。再者, 我们的目的是考虑实际流体中涡斑的运动和演化, 因此在给定初始的涡斑后, 数值求解原始变量的 Navier-Stokes 方程。在涡斑的行为已知后, 则忽略粘性对声波辐射的影响, 采用上一节从 Powell 方程和匹配渐近法得到的公式, 讨论由于涡斑在粘性流场中涡量的变化造成的声场特征。考虑二维粘性流体内的涡斑运动, 取原点附近的 2, 3 和 4 涡斑系统, 各个涡斑的初始半径 r_0 均为 0.01m。计算域为一方形空间, 空间的长宽远比涡斑的活动范围为大, 曾取过 3m 和 5m, 发现对声压的结果没有影响, 涡斑可以看作是

在自由空间内运动的。多数的计算在长宽各为 5m 的方形域内进行。因为计算的区域足够大, 边界上的条件取为无滑移的。方形域内的流体运动计算采用有限差分法, 所得的结果可与参考文献 [2] 相互校核。原始变量的 Navier-Stokes 方程及连续性方程的离散采用空间四阶和时间二阶的 MacCormac 格式, 研究区域划分为 128 × 128 个网格, 时间步长取为 0.005s。

初始条件的确定: 首先给定涡斑的形式和位置, 计算等强度的均匀涡斑, 它们的涡量分布是: $= A, r < r_0, A$ 为常数。为计算初始速度场, 引进流函数

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u_1, \frac{\partial \psi}{\partial x} = -u_2 \quad (5)$$

并利用涡量的定义和连续性方程, 得:

$$\Delta \psi = \frac{u_2}{x_1} - \frac{u_1}{x_2} \quad (6)$$

$$\Delta^2 \psi = -\omega \quad (7)$$

解方程 (7) 可得流函数 ψ , 再由公式 (5), 得到初始速度分布。由初始速度和无滑移边界条件解 Navier-Stokes 方程和连续性方程, 可得各个时刻的 u_1, u_2 , 由 (6) 可计算出各时刻的涡量。

4 计算结果

4.1 涡斑运动

当两均匀涡斑的初始距离为 0.1m 时, 随着时间的发展, 初始涡量为 100 的两涡斑绕其对称中心旋转, 并且两个涡斑向中心靠拢, 逐渐融合在一起, 见图 1。图 1(a): 两均匀涡斑处于初始位置, 图 1(b): $t=8s$ 两涡斑开始融合, 图 1(c): $t=10s$ 两涡斑部分融合, 图 1(d): $t=13s$ 两涡斑完全融合。与文献 [2] 的分析相一致。

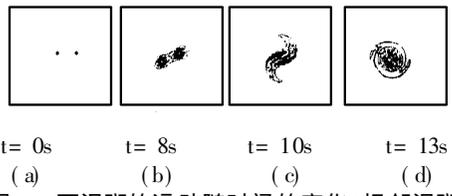


图 1 两涡斑的运动随时间的变化 (相邻涡斑的初始距离为 0.1m)

3 涡斑系统和 4 涡斑系统的运动见图 2 和图 3, 其相邻涡斑的初始距离均为 0.1m, 各个涡斑的初始涡量为 100, 随时间的发展, 3 个涡斑和 4 个涡斑绕其中心位置旋转并逐渐融合到一起。

由此可见, 两个、3 个和 4 个涡斑在一定的初始距离下均能完全融合在一起, 形成一定的涡量分布。

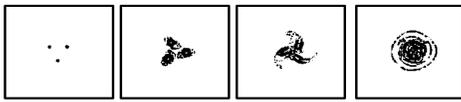


图 2 三涡斑的运动随时间的变化(相邻涡斑的初始距离为 0.1m)

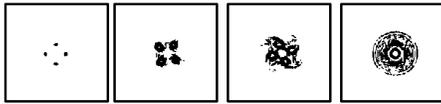


图 3 四涡斑的运动随时间的变化(相邻涡斑的初始距离为 0.1m)

4.2 涡斑声辐射

图 4 为图 1 情况下在纵向正方向离对称中心 1.0m 处声压随时间的变化,在 $t = 0s \sim 8s$, 两涡斑开始互相旋转, 逐渐靠近, 但没有融合, 虽有一定的声压, 但振幅较小; 在 $t = 8s$ 两涡开始融合, 此时声压振幅明显开始增加, 在 $8s \sim 13s$ 这段时间内声压振幅较大, 说明此时的两涡间的相互作用明显; 到 $t = 13s$ 后声波振幅又开始减小了, 这是因为融合已经完成, 两个涡斑基本上已经成为一个涡斑了。通过分析, 可知声压主要是四极子的贡献。另外通过对 3 涡斑系统和 4 涡斑系统的声辐射的计算, 可知 3 涡斑系统和 4 涡斑系统的声压同 2 涡斑系统一样主要决定于四极子项; 3 涡斑系统和 4 涡斑系统在融合阶段声辐射都较大, 4 个涡斑融合所需的时间较长, 对应于较大声压的时间也较长。值得注意的是虽然 3 涡斑系统和 4 涡斑系统的初始总涡量比两个涡斑系统的

大, 但 3 涡斑系统和 4 涡斑系统的最大声压振幅明显比 2 涡斑系统的最大声压小, 声辐射的大小主要决定于积分核 $\frac{x_i x_j}{R^2} \dot{\gamma}_{ij}(t^*)$, 3 涡斑系统和 4 涡斑系统之间的相互作用使得此核的值在融合阶段较两涡斑系统小。

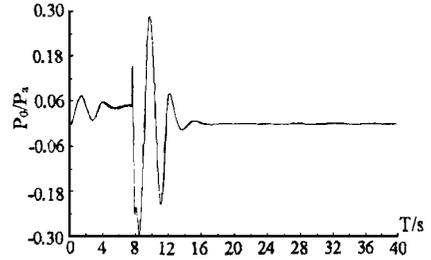


图 4 两涡斑系统的声压波形

5 结 论

本文对自由空间的涡斑运动发声的研究表明: 涡斑在融合阶段声压振幅较大, 自由空间涡斑发声呈现出四极子的特性; 虽然 3 涡斑和 4 涡斑系统的初始总涡量比两涡斑系统的大, 但其声压幅值明显小于两涡斑系统, 由此推得不同涡系的声辐射不同, 可以通过有效控制涡系来降低声辐射的大小。

参考文献:

- [1] Tang S. K., Ko N. W. M. Sound Generation by interaction of two inviscid two-dimensional vortices [J]. J. Acoust. Soc. Am, 1997, 12(3): 1463-1473.
- [2] Norman J. Zabusky. Contour dynamics for the Euler equations in two dimensions [J]. Journal of computational physics, 1979, 30: 96-106.

(上接第 6 页)

4 结 论

本文考虑压电晶片的各向异性和压电性能的同时, 对液体-压电晶片结构中不同电边界条件下叉指换能器激发兰姆波进行了理论研究, 定量分析了兰姆波的有关性能, 在不同边界条件下兰姆波有关特性的差异, 为兰姆波器件设计时电边界条件、归一化厚度和切向的选择提供理论依据, 为提高器件的灵敏度和稳定性提供了新的思路。

参考文献:

- [1] Milson R F, Relly N H C, Redwood M. A analysis of gen-

eration and detection of surface and bulk acoustic waves by interdigital transducers [J]. IEEE Trans. SU., 1977, 24(3): 147-166.

- [2] Auld B A. Acoustic fields and waves in solids[M]. New York: John Wiley & sons, 1973. 2.
- [3] Joshi S. G., Yin Y. Excitation of ultrasonic Lamb waves in piezoelectric plates [J]. Journal of Applied Physics, 1991, 69(12): 8018-8024.
- [4] 邓明晰, 吕霞付, 蔡绍哲. 压电晶体-液体-固体声波导中叉指换能器对导波的激发研究 [J]. 应用声学, 1999, 18(3): 14-21.
- [5] 邓明晰. 压电晶体-液体-各向同性固体分层结构中的声反射和声透射 [J]. 应用声学, 1997, 16(1): 21-27.