文章编号: 1000-3630(2001)03-0137-03

(2+1)维 mKdV 方程 dromions 相互作用的研究

阮航宇
(宁波大学物理系, 宁波 315211)

摘　要: 从两个线孤子解出发, 可以得到双线性形式 2+1 维 mKdV 方程的某个势函数的 dromion 解。该 dromion 解在所有方向都是局域的。两个 dromion 之间的相互作用通过图形分析的方法进行了详细研究。依据参数的不同选择, 该相互作用可以是弹性的也可以是非弹性的。
关键词:　mKdV 方程; 孤子相互作用; 双线性形式
中图分类号: O422.7　　文献标识码: A

Dromions interaction of (2+1)-dimensional mKdV equation

YUAN Hang-yu
(Department of Physics. Ningbo University; Ningbo 315211; China)

Abstract: Starting from two line solitons; the solution of integrable (2+1)-dimensional mKdV equation in bilinear form yields a dromion solution that is localized in all directions for a suitable potential. The interaction between two dromions is studied in detail through the method of figure analysis for (2+1)-dimensional modified KdV equation. For different selections of parameters; the interactions between two dromions may be elastic; not completely elastic; or completely inelastic.
Key words:　mKdV equation; dromion interaction; bilinear form

虽然(1+1)维可积非线性演化方程的孤子结构和性质已经被研究得非常透彻, 高维孤子结构仍是一个有待探索的迷。最近在(2+1)维可积模型中发现的称为 dromion 的指数局域的孤子解, 引起了众多物理学家和数学家们的极大兴趣[1~3]。

本文感兴趣的是(2+1)维可积系统中的 dromions 相互作用。我们知道孤子理论在自然科学的许多领域如等离子体物理、流体力学、非线性光学、纤维光学和固体物理等有着广泛的应用前景。而孤子相互作用性质在其中起着非常重要的作用。因此可积模型中孤子相互作用性质的研究是一个非常有意义的课题。众所周知(1+1)维可积模型中孤子的相互作用是弹性的, 但关于(2+1)维可积模型中孤子相互作用的研究报道却各不相同[4,5]。我们想知道为什么 dromions 相互作用对一些模型来说是弹性的, 对另一些模型来说是非弹性的? 我们也想了解同一个可积模型中是否可能出现不同相互作用性质的孤子解。为此本文对下述(2+1)维可积的 mKdV 方程进行了详细的研究[6]:

$$u_y + u_{ttt} + u_{xxx} + 3u_x v_{xx} + 3u_t v_{tt} - u_x^3 - u_t^3 = 0,$$
$$v_{xt} = u_x u_t \qquad (1)$$

在式(1)中进行变量代换:

$$u = -2\tan^{-1}\left(\frac{g}{f}\right), \quad v = \log(g^2 + f^2) \qquad (2)$$

可得到方程(1)的双线性形式

$$A(D_X)(f\cdot f + g\cdot g) = D_x D_t(f\cdot f + g\cdot g) = 0,$$
$$B(D_X)f\cdot g = (D_x^3 + D_t^3 + D_y)f\cdot g = 0 \qquad (3)$$

很容易证明方程组(3)拥有三孤子解:

$$f(x, y, t) = 1 + a(1,2)\exp(\eta_1 + \eta_2) + a(1,3)\exp(\eta_1 + \eta_3) + a(2,3)\exp(\eta_2 + \eta_3) \qquad (4)$$

$$g(x, y, t) = \exp(\eta_1) + \exp(\eta_2) + \exp(\eta_3) + a(1,2)a(1,3)a(2,3)\times\exp(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) \qquad (5)$$

$$\eta_i = p_i x + q_i y + \omega_i t + \eta_{io} \qquad (6)$$

$$a(i,j) = -\frac{A(P_i - P_j)}{A(P_i + P_j)} = -\frac{(p_i - p_j)(\omega_i - \omega_j)}{(p_i + p_j)(\omega_i + \omega_j)}$$
$$B(P_i) = p_i^3 + \omega_i^3 + q_i = 0 \qquad (7)$$

$$w = L(\partial X)K(\partial X)(\tan^{-1}(g/f)) \equiv (a_1\partial_x + b_1\partial_y)\cdot(a_2\partial_x + b_2\partial_y)(\tan^{-1}(g/f)) \qquad (8)$$

方程系统(3)相对于势函数(8)存在着双 dromions 解。式中 a_1、b_1、a_2、b_2 的选择应该使得线性算符 $L(\partial_X)$, $K(\partial_X)$ 湮灭两种线孤子, 而在线孤子的交叉点上留下了一个 dromion。在式(8)中做坐标变换:

$$p_1 x + q_1 y = p x_1, \quad p_2 x + q_2 y = q y_1,$$
$$\Delta \equiv p_1 q_2 - p_2 q_1 \neq 0 \qquad (9)$$

并且固定常数 $a_1 = -\frac{q_1 q}{\Delta}$, $b_1 = \frac{p_1 q}{\Delta}$, $a_2 = \frac{q_2 q}{\Delta}$, $b_2 = -\frac{p_2 q}{\Delta}$。则式(8)可以表示为:

收稿日期: 2000-01-12; 修回日期: 2000-08-12
作者简介: 阮航宇(1956-), 女, 浙江人, 博士, 教授, 从事非线性物理的教学与研究工作。

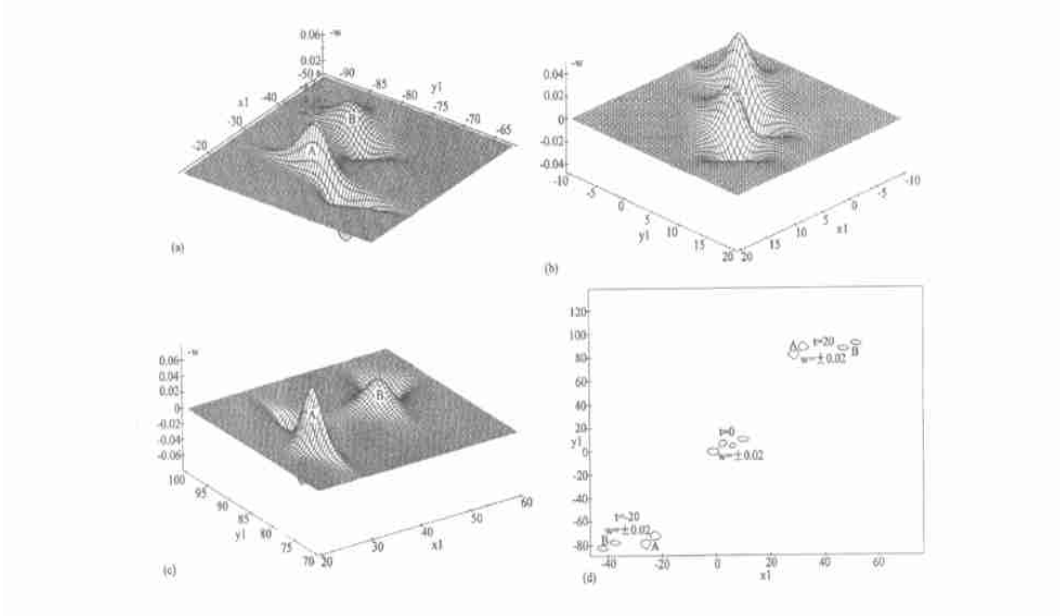


图 1　由三个隐线孤子形成的 mKdV 方程的 dromions 相互作用图

$$w = (a_1\partial_x + b_1\partial_y)(a_2\partial_x + b_2\partial_y)[\tan^{-1}(g/f)]$$
$$\equiv \partial_{x_1}\partial_{y_1}[\tan^{-1}(g/f)] \qquad (10)$$

上式中的 $g(x_1, y_1, t)$ 和 $f(x_1, y_1, t)$ 与式(4)和式(5)所表示的相同, 但 η_i 应该取为:

$$\eta_i = p_i x + q_i y + \omega_i t + \eta_{i0} = p'_i x_1 + \omega_i t + \eta_{i0}$$

或　$$\eta_i = p_i x + q_i y + \omega_i t + \eta_{i0} = q'_i y_1 + \omega_i t + \eta_{i0} \quad (11)$$

我们知道(1+1)维孤子在碰撞过程中没有能量和动量的交换, 本文希望了解(2+1)维可积模型中 dromions 相互作用的情况。由于多 dromions 解的复杂性, 解析分析 dromions 相互作用十分困难, 下面我们采用图形分析方法进行探讨。

图 1 和图 2 是由三个隐线孤子形成的关于势函数 ω 的双 dromions 相互作用图。在图 1 中三个隐线孤子被选为:

$$\eta_1 = \frac{1}{2}x + y - \frac{1}{8}9^{1/3}8^{2/3}t$$
$$= \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{8}9^{1/3}8^{2/3}t,$$
$$\eta_2 = 2x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}17^{1/3}2^{2/3}t$$
$$= \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}17^{1/3}2^{2/3}t,$$
$$\eta_3 = x + 2y - 3^{1/3}t = x_1 - 3^{1/3}t \qquad (12)$$

由于式(12)中参数(p_i, q_i)的选择, 使得式(4)和式(5)中的相互作用常数 $a(i, j)$ 均不为零。在图 1(a)、1(b)和 1(c)中, 时间 t 取为-20、0、20。图 1(d)是一幅与 1(a) ~ 1(c)相应的等势截面图($W = \pm 0.02$)。从图 1 中可清楚地看到两个 dromions 在相互作用前后形状相同, 除了位相漂移没有其它物理量的改变, 即相互作用是弹性的。

在图 2 中, 三个隐线孤子由下式决定:

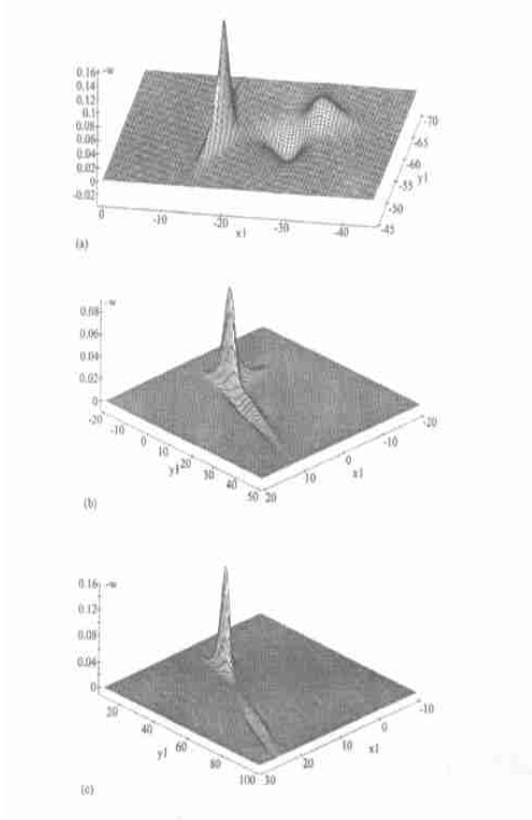


图 2　mKdV 方程的双 dromions 相互作用图

$$\eta_1 = 2x + 4y - 12^{1/3}t = 2x_1 - 12^{1/3}t,$$

$$\eta_2 = 2x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}17^{1/3}2^{2/3}t$$

$$= \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}17^{1/3}2^{2/3}t,$$

$$\eta_3 = \frac{1}{2}x + y - \frac{1}{8}9^{1/3}8^{2/3}t$$

$$= \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{8}9^{1/3}8^{2/3}t \qquad (13)$$

式(13)中参数的选取, 使得式(4)和式(5)中的相互作用常数 $a(1,2)=0$, $a(1,3)\neq 0$, $a(2,3)\neq 0$。图 2(a)、2(b)和 2(c)中, 时间 t 分别为 -15、0、8。显然图 2 显示的现象不同于图 1, 两个 dromions 在相互作用之后形状发生了改变, 也就是说 dromions 在相互作用过程中发生了能量和动量的交换。

本文给出了(2+1)维可积 mKdV 方程的 dromions 相互作用图象, 在同一个方程中存在着不同的相互作用性质。依照耦合常数是否为零, 出现了弹性和非弹性两种不同的碰撞性质。这种现象类似于经典粒子的碰撞, 该相互作用现象是否可能发生在其它的(2+1)维可积模型中值得进一步研究。

参考文献:

[1] M. Boiti, J. J. P. Leon, L. M. Martina and F. Pempinelli, Scattering of localized solitons in the plane[J]. Phys. Lett. A, 1988, 132: 432

[2] L. P. Nizhnik, Integration of multidimensional nonlinear equations by the method of the inverse problem[J]. Sov. Phys. Dokl, 1980, 25: 706

[3] R. Radha and M. Lakshmanan, Singularity analysis and localized coherent structures in (2+1)-dimensional generalized Korteweg-de Vries equations [J]. J. Math. Phys., 1994, 35: 4746.

[4] J. Hieterinta and R. Hirota, Multidromion solution to the Davey-Stewartson equation [J]. Phys. Lett. A, 1990, 145: 237.

[5] H-y Ruan, (2+1)维 NLBQ 方程和 KP 方程的多 dromion 结构和相互作用的研究[J]. 物理学报, 1999, 48: 1781.

[6] K. M. Tamizhmani, Lie symmetries of Hirota's bilinear equations[J]. J. Math. Phys., 1991, 32: 2635.

(上接第 136 页)

根据微穿孔板吸声体非线性特点, 对应用于高声强下的吸声降噪而设计的吸声体, 随着声强增加, 其吸声性能将提高。根据上述的辅助设计, 设计线性声阻 $r_L = 0.351 < 1$ 的样品, 即不锈钢样品Ⅱ(穿孔直径 $d = 1.0$mm, 板厚 $t = 0.3$mm, 孔间距 $b = 11.0$mm, 加工方法为钻孔加工)。其实验结果图 5 表明, 随着声强的提高吸声系数增加至最大, 然后又开始下降, 这与理论分析一致, 极大值声压为 95dB 和 115dB 时吸声频带宽度变化不大, 而 120dB 时, 由于板共振的影响又出现了共振峰, 且频带宽度增加了许多, 这也说明可以利用板共振加宽吸声频带。

5 结束语

根据文献[4]提出的高声强下微穿孔板非线性声阻经验公式, 本文提出了一些关于非线性声阻作用的临界条件, 并运用上述临界公式对高声强下微穿孔板吸声体进行的计算机辅助设计。

孔径小于 0.2mm 样品Ⅰ的实验结果, 表明宽频带的微穿孔板随着声强的提高, 相对声阻增加, 从而吸声性能发生变化。样品Ⅰ线性相对声阻 $r_L > 1$, 说明低中声强的最佳设计在高声强下吸声系数将大幅度下降。随着声强的提高, 样品Ⅰ在共振频率时的相对声阻增加但是整个频带范围的相对声阻的变化规律性不强, 相对声抗与线性理论时相比相差变化不大。

根据本文提出的辅助设计, 设计线性声阻 $r_L < 1$ 的样品Ⅱ, 其实验结果显示随着声强增加吸声性能将得到提高, 即在声场强度较高环境下的吸声效果较好, 说明本文提出的高声强下微穿孔板设计有一定的实用性。

本文对微穿孔板吸声体的非线性特性只是做了初步的研究, 希望能为进一步的深入研究提供帮助。

参考文献:

[1] 马大猷. 微穿孔板吸声结构的理论和设计[J]. 中国科学, 1975, 1: 38-50.

[2] 杜功焕, 龚秀芬. 高声压级时穿孔结构非线性声学特性的研究[J]. 声学学报, 1984, 9(5): 326-332.

[3] 马大猷. 微穿孔板吸声体的准确理论和设计[J]. 声学学报, 1998, 23(1): 1-7.

[4] 马大猷. 高声强下的微穿孔板[J]. 声学学报, 1996, 21(1): 10-14.