文章编号: 1000-3630(2001) 04-0177-03

纯方位目标运动分析可测性研究

张安民, 杨世兴, 李志舜
(西北工业大学航海工程学院, 西安 710072)

摘要: 纯方位被动目标运动分析在理论上和实际上均有许多应用, 为了保证本艇有唯一的跟踪, 必须研究目标运动分析的可测性问题。文章利用线性代数的基本方法, 获得了一个新的可测性准则, 随后应用在经典的目标运动分析问题中, 研究表明, 该方法是切实有效的。

关键词: 目标运动分析; 跟踪; 目标
中图分类号: TN911.2　　　　文献标识码: A

Observability of bearing-only target motion analysis

ZHANG An-min, YANG Shi-xing, LI Zhi-shun
(Northwestern Polytechnical University, Xi′an 710072, China)

Abstract: A amount of study has been devoted in bearing-only target motion analysis. The observability of TMA must be studied in order to insure only tracking. Using basic results of linear algebra. a new observability has been derived, it is a efficient tool for classical TMA.

Key words: target motion analysis; tracking; target

1 引 言

通常被称为目标运动分析(TMA)的被动目标状态估计问题具有广泛的实用研究价值。与主动系统不同, 被动观测仪和目标之间的距离一般来讲是未知的, 这使得系统的可测性成为目标运动分析中的一个非常困难的问题。在所有的测量量均来自单个观测者且只属于方位角时, 在这样的特定条件下, 目标状态的可测性只能由观测者的运动保证。实际上, 这是很重要的, 因为只有目标的状态完全可测时才能得到可靠的估计性能, 也就是说目标运动分析的基本要求就是系统可测, 即有唯一的跟踪法。

在许多文献中, 一般有两类方法来解决 TMA 可测性问题。第 1 种方法利用的原理为将非线性形式转变为线性形式, 然后直接利用线性系统的经典可测性理论进行问题的分析。对于常速目标(一阶动力系统)详细研究了二维和三维空间中的可测性问题[1, 2], 获得了用复杂的非线性方程表示的可测性准则。为了获得可测性充分必要条件, 必须进行冗长的数学运算, 第 2 种方法避免了对观测矩阵的分析, 通过建立有关变量方程的等价形式对一般三维 N 阶动态系统进行分析[3]。

虽然从理论上解决了一般 TMA 可测性问题[2], 但以前的研究表明, 模型线性化方法并不能获得令人满意的效果, 这就使得第 2 种方法由于过于复杂在实际应用中不太实用。因此, 有人将线性系统理论直接用于 TMA 中, 仅仅通过简单的代数运算建立了可测性的充要条件[4]。随后, 从应用在线性系统中研究可测性的基本代数方法入手, 分析了被动系统中遇到的大部分可测性问题[5], 该方法的主要优点是比基于李代数的方法更易处理。

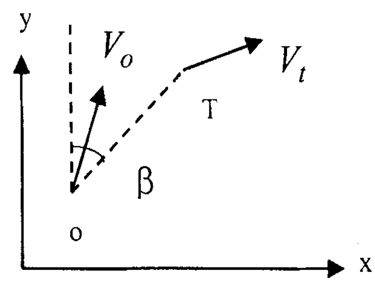

图 1　目标运动分析示意图

本文主要研究经典 TMA 问题中可测性之间的相似性, 通过数学运算获得非线性微分方程的一个经典可测性准则, 然后利用基本的多线性代数方法获得了它的显式表示。

2 问题的构成

图 1 为目标运动分析示意图, 图 1 中, O 表示本艇, T 表示目标, OT 表示相对距离。对于图 1 所示的常速运动目标其运动方程为[1]:

收稿日期: 2000-05-01, 修回日期: 2000-07-31
作者简介: 张安民(1972-), 男, 陕西宝鸡人, 博士研究生, 研究方向为武器系统分析和智能技术。

$$r(t)=r(t_0)+(t-t_0)\boldsymbol{V}(t_0)-\int_{t_0}^{t}(t-\tau)a_0(\tau)\mathrm{d}\tau \quad (1)$$

其中, r 和 $\boldsymbol{V}$ 分别为目标的相对距离和速度矢量, a_0 为本艇的加速度。

由于主要考虑可测性理论, 所以仅仅考虑无噪声的测量, 对于纯方位 TMA, 测量量满足下面的非线性关系:

$$\beta(t)=\tan^{-1}[r_x(t)/r_y(t)] \quad (2)$$

由式(1)和式(2)有 $\quad \boldsymbol{M}^{\tau}(t)\boldsymbol{X}=y(t) \quad (3)$

其中, $\boldsymbol{X}=(r_x(t_0), r_y(t_0), v_x(t_0), v_y(t_0))^{\tau} \quad (4)$

$$\boldsymbol{M}^{\tau}(t)=(\cos\beta_t, -\sin\beta_t, t\cos\beta_t, -t\sin\beta_t) \quad (5)$$

$$y(t)=\int_{t_0}^{t}(t-t_0)[a_{0x}(\tau)\cos\beta_t-a_{0y}(\tau)\sin\beta_t]\mathrm{d}\tau \quad (6)$$

定义 4×4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$ 为: $\boldsymbol{A}(t)=(M_t, M_t^{(1)}, M_t^{(2)}, M_t^{(3)})$, 其中, $M_t^{(1)}$、$M_t^{(2)}$、$M_t^{(3)}$ 分别表示 M_t 的一、二、三阶导数。

方程(1)和(2)描述的系统经典可测性分析就在于确定给定 t 时矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$ 的秩。更准确地说, TMA 系统是可测的当至少存在一个 t 值使得矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$ 满秩。

为了由这个准则容易地获得系统可测的一个测量量, 设测量是有噪的, 且是方差为 σ^2 的高斯白噪声, 则矢量 $\boldsymbol{X}$ 估计的 Fisher 信息阵(FIM)为[6]:

$$\mathrm{FIM}(t, t+k)=(r\sigma)^{-2}\boldsymbol{M}(t, t+k)\boldsymbol{M}^{\tau}(t, t+k) \quad (7)$$

其中 $\boldsymbol{M}(t, t+k)=(M_t, M_{t+1}, \cdots, M_{t+k}) \quad k\geqslant 3 \quad (8)$

此时可测性问题就在于计算 FIM 行列式值, 则有

$$\det(\mathrm{FIM}(t, t+3))=(r\sigma)^{-8}[\det(\boldsymbol{M}(t, t+3))]^2 \quad (9)$$

式(9)就是获得的可测性准则, 当式(9)不等于零时表明问题可测, 否则不可测。

性质 1: 对于矢量 $\boldsymbol{M}_{t+i}$ 三阶展开, 则有 $\det(\boldsymbol{M}(t, t+3))=\det(M_t, M_t^{(1)}, M_t^{(2)}, M_t^{(3)})$

证明: 利用外积代数理论可以直接进行行列式求值运算, 有:

$$\det(\boldsymbol{M}(t, t+3))=(M_t\wedge M_{t+1})\wedge(M_{t+2}\wedge M_{t+3}) \quad (10)$$

对于矢量 M_{t+i} 三阶展开, 有

$$M_{t+i}=M_t+iM_t^{(1)}+\frac{i^2}{2}M_t^{(2)}+\frac{i^3}{6}M_t^{(3)} \quad (11)$$

所以, $M_t\wedge M_{t+1}=M_t\wedge M_t^{(1)}+\frac{1}{2}M_t\wedge M_t^{(2)}+\frac{1}{6}M_t\wedge M_t^{(3)} \quad (12)$

$$M_t\wedge M_{t+3}=3M_t^{(1)}\wedge M_t^{(2)}+3M_t^2\wedge M_t^{(3)}+5M_t^{(1)}\wedge M_t^{(3)} \quad (13)$$

$$\det(\boldsymbol{M}(t, t+3))=3M_t\wedge M_t^{(1)}\wedge M_t^{(2)}\wedge M_t^{(3)}+\frac{5}{2}M_t\wedge M_t^{(2)}\wedge M_t^{(3)}+\frac{1}{2}M_t\wedge M_t^{(3)}\wedge M_t^{(1)}\wedge M_t^{(2)}$$

因此, $\det(\boldsymbol{M}(t, t+3))=\det(M_t, M_t^{(1)}, M_t^{(2)}, M_t^{(3)})=\det(\boldsymbol{A}(t)) \quad (14)$

就可测性而言, 由这个性质可知, 如果 $\det(A(t))$ 非零, 则 $M(t, t+3)$ 是可逆的。$\det(A(t))$ 非零就意味着 TMA 问题是可测的, 文献[1]中的可测性准则得到证明, 从而说明式(9)表示的可测性准则与经典的可测性准则具有相似性。

性质 2: 对于矢量 M_{t+i} 三阶展开, 则有

$$\det(\mathrm{FIM}_{t, t+3})=(r\sigma)^{-8}[\det(M_t, M_t^{(1)}, M_t^{(2)}, M_t^{(3)})]^2$$

证明: FIM 阵采用下面的一般形式,

$$\mathrm{FIM}=(G_t, \cdots, G_{t+3})(G_t, \cdots, G_{t+3})^{\tau}$$

其中 $G_{t+i}=\frac{1}{\sigma r_{t+i}}M_{t+i}$

利用性质 1 则有:

$$\det(\mathrm{FIM})=[\det(G_t, \cdots, G_t^{(3)})]^2$$

其中,

$$\begin{aligned}
G^{(1)}&=\frac{1}{\sigma r}M^{(1)}-\frac{g}{\sigma r}M\\
G^{(2)}&=\frac{1}{\sigma r}M^{(2)}-2\frac{g}{\sigma r}M^{(1)}+\left(\frac{g^2}{\sigma^2 r^2}-\frac{g^{(1)}}{\sigma r}\right)M\\
G^{(3)}&=\frac{1}{\sigma r}M^{(3)}-3\frac{g}{\sigma r}M^{(2)}+3\left(\frac{g^2}{\sigma^2 r^2}-\frac{g^{(1)}}{r}\right)M^{(1)}+\\
&\left(3\frac{g^{(1)}g}{r^2}-2\frac{g^3}{r^2}-\frac{g^{(2)}}{r}\right)M
\end{aligned} \quad (15)$$

$$g=r^{(1)}/r$$

所以, 有

$$\begin{aligned}
G\wedge G^{(1)}&=\frac{1}{\sigma^2 r^2}M\wedge M^{(1)}\\
G^{(2)}\wedge G^{(3)}&=\frac{1}{\sigma^2 r^2}M^{(2)}\wedge M^{(3)}
\end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
\det(\mathrm{FIM})&=[(G\wedge G^{(1)})\wedge(G^{(2)}\wedge G^{(3)})]^2\\
&=(\sigma r)^{-8}[\det(M_t, M_t^{(1)}, M_t^{(2)}, M_t^{(3)})]^2
\end{aligned}$$

性质 2 得到了证明, 由于引入了 $1/r$ 项作为相乘因子, 所以这个性质是很重要的。

性质 3: $\det\boldsymbol{A}(t)$ 与 β_t 的值无关

证明: 利用 Kroncker 积定义矩阵 $\boldsymbol{R}_t$ 为:

$$\boldsymbol{R}_t=\begin{pmatrix}R_t & 0\\ tR_t & R_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix}\otimes R_t$$

其中 $R_t=\begin{pmatrix}\cos\beta_t & \sin\beta_t\\ -\sin\beta_t & \cos\beta_t\end{pmatrix}$ (17)

则 $\boldsymbol{M}_t=R_tE_1,\ \boldsymbol{E}_1=(1\ 0\ 0\ 0)^{\tau}$

因此 $M_t^{(i)}=R_t^{(i)}E_1,\quad i=1,2,3$ (18)

$$\boldsymbol{R}_t = C_t\otimes R_t$$

$$R_t^{(1)} = \beta_t^{(1)}(C_t\otimes R_t^{(1)}) + D\otimes R_t$$

$$R_t^{(2)} = \beta_t^{(2)}(C_t\otimes R_t^{(1)}) - \beta_t^{(1)}R_t + (\beta_t^{(1)}+1)(D\otimes R_t^{(1)})$$

$$R_t^{(3)} = \beta_t^{(3)}(C_t\otimes R_t^{(1)}) - 2\beta_t^{(2)}R_t + \cdots \quad (19)$$

其中 $\boldsymbol{C}_t=\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ (20)

由式(19),有 $R_t^{(1)}=R_tJ$,其中 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ (21)

利用行列式求值的多线性特性,由式(14)、式(18)和式(19)可知,$A(t)$为下面一类表示式的求和。

$$\det[R_tE_1,(C_t\otimes R_tJ)E_1,(D\otimes R_tJ)E_1,(C_t\otimes R_tJ)E_1] \quad (22)$$

利用张量求积性质有:

$$\boldsymbol{R}_t = C_t\otimes R_t = (I\otimes R_t)(C_t\otimes I) \quad (23)$$

同理,有 $C_t\otimes R_tJ=(I\otimes R_t)(C_t\otimes J)$ (24)

$$D\otimes R_tJ=(I\otimes R_t)(D\otimes J) \quad (25)$$

则: $Expr.22=(\det R_t)^2\det[(C_t\otimes I)E_1,(C_t\otimes J)E_1,(D\otimes I)E_1,(C_t\otimes J)E_1]$ (26)

由式(22)可知,$\det\boldsymbol{R}_t=1$。

所以,$\det\boldsymbol{A}(t)$本身与 β_t 无关,性质得证。由性质3可令参考时间 $t_0=0$。

3 可测性准则的具体应用

对于图1描述的经典TMA问题,测量量为方位角 β。假定目标的运动为直线匀速运动,由性质2和性质3可知,当 $\beta_t=0,\ t_0=0$ 时有

$$\boldsymbol{M}_t=\begin{pmatrix}\cos\beta_t\\ -\sin\beta_t\\ t\cos\beta_t\\ -t\sin\beta_t\end{pmatrix} \quad (27a)$$

$$\boldsymbol{M}_t^{(1)}=\begin{pmatrix}-\sin(\beta_t)\beta_t^{(1)}\\ -\cos(\beta_t)\beta_t^{(1)}\\ -t\sin(\beta_t)\beta_t^{(1)}+\cos(\beta_t)\\ -t\cos(\beta_t)\beta_t^{(1)}-\sin(\beta_t)\end{pmatrix} \quad (27b)$$

所以:

$$\det\boldsymbol{A}(t)=\det\begin{pmatrix}-\beta_t^{(1)} & -\beta_t^{(2)} & (\beta_t^{(1)})^3-\beta_t^{(3)}\\ 1 & 0 & -3(\beta_t^{(1)})^2\\ 0 & -2\beta_t^{(1)} & -3\beta_t^{(2)}\end{pmatrix}$$

$$=4\beta_t^{(1)}+2\beta_t^{(1)}\beta_t^{(3)}-3(\beta_t^{(2)})^2 \quad (28)$$

因此,$\det(\mathrm{FIM}_{t,t+k})=c_k[4(\beta_t^{(1)})^4+2\beta_t^{(1)}\beta_t^{(3)}-3(\beta_t^{(2)})^2]^2$ (29)

$\det[\mathrm{FIM}_{t,t+k}]=0$ 准确地描述了文献[1]中的可测性准则。当观测者不机动时,有

$$\beta^{(2)}=-2\beta^{(1)}g,\quad \beta^{(3)}=6\beta^{(1)}g^2-2(\beta^{(1)})^3 \quad (30)$$

其中 $g=r^{(1)}/r$。

将式(30)代入式(29),则有 $\det[\mathrm{FIM}_{t,t+k}]=0$。这就验证了文献[1]中的可测性准则。从而说明该准则与文献[1]中的准则具有相似性。

当目标具有恒定加速度时,则状态矢量 $\boldsymbol{X}$ 为六维的($\boldsymbol{X}=(x,r,\alpha)^{\tau}$)。因此,$\boldsymbol{M}_t$ 也为六维。则 $\det\boldsymbol{A}(t)=\det(M_{t,t+5})(t=0,\beta_t=0)$。

所以 $\det(\mathrm{FIM}_{t,t+k})=c_k[-64(\beta^{(1)})^9+288(\beta^{(1)})^5(\beta^{(2)})^2+540\beta^{(1)}(\beta^{(2)})^4+192(\beta^{(1)})^6\beta^{(3)}-720(\beta^{(1)})^2(\beta^{(2)})\beta^{(3)}+40(\beta^{(3)})^3+240(\beta^{(1)})^3\beta^{(2)}\cdot\beta^{(4)}-60\beta^{(2)}\beta^{(3)}\beta^{(4)}+15\beta^{(1)}(\beta^{(4)})^2-24(\beta^{(1)})^4\cdot\beta^{(5)}+18(\beta^{(2)})^2\beta^{(5)}-12\beta^{(1)}\beta^{(3)}\beta^{(5)}]^2$ (31)

式(29)和式(31)就是所获得的可测性准则的显式表示。由此可知,可测性准则仅仅表示为方向角的简单代数方程,当式(29)和式(31)不等于零时系统是可测的。

4 结 论

本文利用多线性代数的基本方法,获得了一个用Fisher信息阵(FIM)表示的新的目标运动分析问题的可测性准则,同时获得了它的显式表示。研究表明,该准则与经典的TMA可测性准则有相似性,因此它可以作为分析不同的TMA问题可测性的一个简单有效且用途广泛的工具。

参考文献:

[1] Nardone S C, Aidala V J. Observability criteria for bearing-only target motion analysis [J]. IEEE. Trans. On AES, 1981, 17(2): 162-166.

[2] Hammel S E, Aidala V J. Observability requirements for three-dimension tracking via angle measurements [J]. IEEE. Trans. On AES, 1985, 21(2): 200-207.

[3] Fogel E Gavish M. Nth-order dynamics target observability from angle measurements[J]. IEEE. Trans. On AES, 1988, 24(2): 305-308.

[4] K becker. Simple linear theory approach to TAM observability[J]. IEEE. Trans. On AES, 1993, 29(2): 575-578.

[5] Jauftret S C, Pillon D. Observability in passive target motion analysis [J]. IEEE. Trans. On AES, 1996, 32(4): 1290-1300.

[6] Nardone S C, Lingren A G, Gong K E. Fundamental properties and performance of conventional bearing-only target motion analysis[J]. IEEE. Trans. On AC, 1984, 29(9): 775-787.