

# 复合固体层中兰姆波的积累 二次谐波发生与传播研究

邓明晰<sup>1,2</sup>, 刘镇清<sup>1</sup>

(1. 同济大学声学研究所, 上海 200092; 2. 重庆后勤工程学院, 重庆 400016)

**摘要:**文章提出一种分析复合固体层中兰姆波的积累二次谐波发生与传播的方法。基于导波的部分平面波分析理论,建立了复合固体层中非线性兰姆波的理论模型。在分析过程中,将非线性作为线性情形的二阶微扰进行处理的方法。尽管复合固体层中兰姆波具有频散性质,分析结果表明,对于一些特定条件,二次谐波的振幅可以随传播距离积累增长。根据边界条件和初始激发条件,得到积累二次谐波的形式解,在此基础上进行了数值分析,给出一些有趣的声场分布。

**关键词:**复合固体层;积累效应;兰姆波  
**中图分类号:**O422.7 **文献标识码:**A

## Analysis of generation of cumulative second harmonic of Lamb mode in a composited layer

DENG Ming-xi<sup>1,2</sup>, LIU Zheng-qing<sup>1</sup>

(1. Institute of Acoustics, Tongji University, Shanghai 200092, China  
2. Logistics Engineering Institute, Chongqing 400016, China)

**Abstract:** In this article we have developed a technique for analyzing the nonlinear generation of cumulative second harmonic of a Lamb mode in a composited layer. A theoretical model for nonlinear Lamb mode propagation in a composited layer has been established, based on a partial plane wave approach. The nonlinearity is treated as the second-order perturbation of the linear elastic response. Although Lamb mode propagation is dispersive in a composited layer, the analysis results show that the amplitudes of the second harmonic of Lamb mode do accumulate with propagation distance under certain special conditions. Based on the boundary and initial conditions of excitation, the formal solution to the cumulative second harmonic is derived. Using the formal solution, we have performed some numerical simulations and obtained some interesting distribution of acoustic field patterns.

**Key words:** composited layer; cumulative effect; Lamb mode

### 1 引言

在诸如航空工业等领域经常遇到复合固体层,对其性质(如缺陷、脱粘等)进行有效的无损评价非常重要。超声兰姆波作为一种有效的手段被经常采用到<sup>[1]</sup>。近年来的研究表明,利用工程材料的弹性非线性,能够比其他方法更准确地反映出材料的特征<sup>[2,3]</sup>。对于复合固体层,在其中传播的兰姆波具有频散性质,基频波和二次谐波之间不满足相位匹配条件,伴随基频兰姆波传播所发生的二次谐波振幅不具有随传播距离积累增长的性质。因此,若要利用兰姆波的非线性效应对复合固体层进行无损评

价,就显得比较困难。

对于单层固体板中兰姆波的非线性所进行的研究表明,尽管兰姆波具有频散性质,但确实存在一些条件,使得兰姆波的二次谐波可以具有空间积累增长性质<sup>[4]</sup>。鉴于此,对于由多种介质构成的复合固体层,与单层固体板的情形类似,或许也存在一些特殊条件,使复合固体层中的兰姆波具有强烈的非线性效应,若如此,则就有可能利用兰姆波的非线性对复合固体层进行无损评价。因此,研究复合固体层中兰姆波的二次谐波是否存在积累效应,就很有意义了。

在本文的分析过程中,将非线性作为线性情形的二阶微扰进行处理。为简化所探讨的问题,忽略复合固体层中各种介质的衰减,并认为是非频散的,同时假定固体层的各个界面无滑移。

收稿日期:2000-10-18;修回日期:2001-08-21

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10004016)

作者简介:邓明晰(1965-),男,重庆北碚人,教授,研究方向:超声微传感与非线性声学。

## 2 基本理论

因固体层-粘接层-固体层的情形在实际应用中经常遇到,为简化分析过程,本文就以此为例进行研究,对于其他种类的复合固体层,分析方法相类似。三种介质构成的复合固体层如图 1 所示,其中第 1 层表示粘接层。

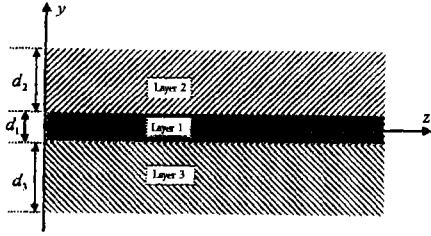


图 1 三层结构的复合固体层

对于图 1 所示的复合固体层中传播的兰姆波,据频散导波的部分平面波分析方法,各层中应有两个部分平面横波和两个部分平面纵波,它们的波矢量沿  $z$  轴的分量相等(见图 2)。

第  $i$  层 ( $i=2,1,3$ ) 中部分平面波的形式解表示

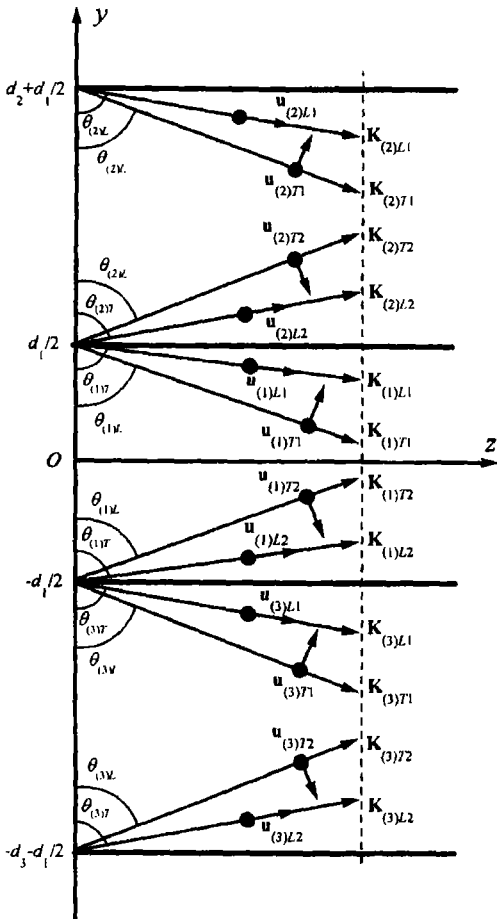


图 2 构成兰姆波的部分平面波的波矢量与位移矢量

声学技术

为<sup>[4, 5]</sup>,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{(i)T1} &= \mathbf{u}_{(i)T1}(\mathbf{K}_{(i)T1}^0 \times \hat{x}) \exp[j\mathbf{K}_{(i)T1} \cdot \mathbf{r} - j\omega t], \\ \mathbf{u}_{(i)L1} &= \mathbf{u}_{(i)L1} \mathbf{K}_{(i)L1}^0 \exp[j\mathbf{K}_{(i)L1} \cdot \mathbf{r} - j\omega t], \\ \mathbf{u}_{(i)T2} &= \mathbf{u}_{(i)T2}(\hat{x} \times \mathbf{K}_{(i)T2}^0) \exp[j\mathbf{K}_{(i)T2} \cdot \mathbf{r} - j\omega t], \\ \mathbf{u}_{(i)L2} &= \mathbf{u}_{(i)L2} \mathbf{K}_{(i)L2}^0 \exp[j\mathbf{K}_{(i)L2} \cdot \mathbf{r} - j\omega t] \end{aligned} \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{(i)Pn} \cdot \mathbf{r} &= kz + (-1)^n \alpha_{(i)P} k y, n = 1, 2, \\ \mathbf{K}_{(i)P} &= \omega / c_{(i)P} = |\mathbf{K}_{(i)P1}| = |\mathbf{K}_{(i)P2}|, \\ k &= K_{(i)P} \sin \theta_{(i)P}, \\ \alpha_{(i)P} k &= K_{(i)P} \cos \theta_{(i)P}, k = \omega / c, \\ \alpha_{(i)P} &= \sqrt{(c^2 / c_{(i)P}^2) - 1}, P = T \text{ or } L \end{aligned} \quad (2)$$

$\mathbf{K}_{(i)Tn}^0$  和  $\mathbf{K}_{(i)Ln}^0$  为波矢量  $\mathbf{K}_{(i)Tn}$  和  $\mathbf{K}_{(i)Ln}$  对应的单位矢量,  $\theta_{(i)T}$  和  $\theta_{(i)L}$  分别是  $\mathbf{K}_{(i)Tn}$  和  $\mathbf{K}_{(i)Ln}$  与  $y$  轴的夹角,  $\hat{x}$  是沿  $x$  轴的单位矢量,  $k$  是  $\mathbf{K}_{(i)Tn}$  和  $\mathbf{K}_{(i)Ln}$  沿  $z$  轴的分量,  $u_{(i)Tn}$  和  $u_{(i)Ln}$  是部分平面波的振幅,  $K_{(i)P}$  是  $\mathbf{K}_{(i)Pn}$  的幅度,  $c_{(i)P}$  ( $P = T$  和  $L$ ) 表示固体层材料的横波和纵波声速。在两个固体界面的边界条件为:

$$\begin{aligned} T_{(i)yy} &= 0, & T_{(i)yz} &= 0 \\ \text{at } y &= d_2 + d_1/2, & y &= -d_3 - d_1/2 \\ T_{(i)yy} - T_{(j)yy} &= 0, & T_{(i)yz} - T_{(j)yz} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} u_{(i)y} - u_{(j)y} &= 0, & u_{(i)z} - u_{(j)z} &= 0 \\ \text{at } y &= \pm d_1/2 \end{aligned}$$

$T_{(i)yy}, T_{(i)yz}$  表示第  $i$  层的法向和切向应力分量,  $u_{(i)y}, u_{(i)z}$  为该固体层中沿  $y$  和  $z$  轴的位移分量。据边界条件(3), 得到

$$[M(\omega, k)] \begin{bmatrix} u_{(i)Ln} \\ u_{(i)Tn} \end{bmatrix} = 0, i = 2, 1, 3, n = 1, 2 \quad (4)$$

其中  $[M(\omega, k)]$  为一  $12 \times 12$  的系数矩阵, 其各个元容易由边界条件求得, 因篇幅限制, 这里就将其略去。据  $|M(\omega, k)| = 0$  容易得到兰姆波的频散关系。

在第  $i$  层中兰姆波的位移场表示为[省去  $\exp(-j\omega t)$ ]:

$$\begin{aligned} u_{(i)y} &= \sum_{n=1}^2 \{ (-1)^n u_{(i)Ln} \cos \theta_{(i)L} \exp[j\mathbf{K}_{(i)Ln} \cdot \mathbf{r}] + \\ & (-1)^{n-1} u_{(i)Tn} \sin \theta_{(i)T} \exp[j\mathbf{K}_{(i)Tn} \cdot \mathbf{r}] \} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\mathbf{u}_{(i)z} = \sum_{n=1}^2 \{ \mathbf{u}_{(i)Ln} \sin \theta_{(i)L} \exp[j\mathbf{K}_{(i)Ln} \cdot \mathbf{r}] + \mathbf{u}_{(i)Tn} \cos \theta_{(i)T} \exp[j\mathbf{K}_{(i)Tn} \cdot \mathbf{r}] \} \quad (6)$$

在二阶近似下固体介质中的波动方程为<sup>[4]</sup>:

$$\rho_{(i)} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{(i)}^{(2)}}{\partial t^2} - [\kappa_{(i)} + 4\mu_{(i)}/3] \nabla [\nabla \cdot \mathbf{u}_{(i)}^{(2)}] + \mu_{(i)} \nabla \times [\nabla \times \mathbf{u}_{(i)}^{(2)}] = F[\mathbf{u}_{(i)}^{(1)}] \quad (7)$$

位移矢量的上标(1)和(2)分别对应基频波和二次谐波,  $\rho_{(i)}$ 为介质的密度,  $\kappa_{(i)}$ 和  $\mu_{(i)}$ 为介质的二阶弹性常数。式(7)的右端  $F[\mathbf{u}_{(i)}^{(1)}]$ 为源于介质的体非线性由基频波  $\mathbf{u}_{(i)}^{(1)}$ 经非线性虎克定律产生的二阶驱动力。在第  $i$  层中, 基频波的位移矢量表示为:

$$\mathbf{u}_{(i)}^{(1)} = \sum_{n=1}^2 [\mathbf{u}_{(i)Ln} + \mathbf{u}_{(i)Tn}]$$

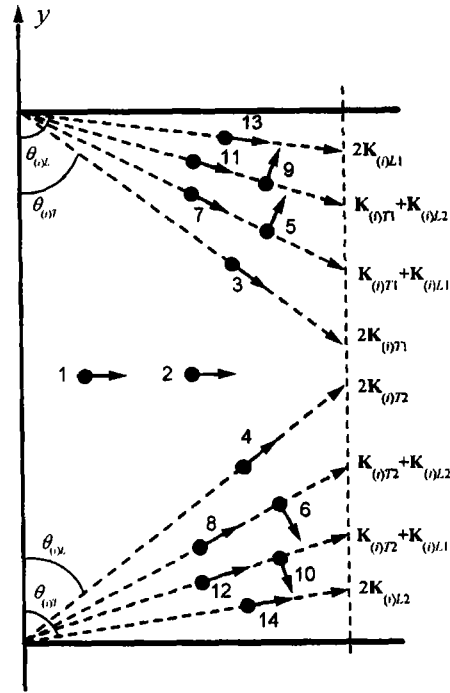
与单层固体板中兰姆波的分析过程相类似, 在第  $i$  固体层中, 由部分平面波的非线性自作用和相互作用产生的二阶驱动力可表示为  $[\exp(-j2\omega t)$  略写]<sup>[4]</sup>:

$$F[\mathbf{u}_{(i)}^{(1)}] = \sum_{l,n=1}^2 (-1)^l [\hat{x} \times (\mathbf{K}_{(i)Tl}^0 + \mathbf{K}_{(i)Ln}^0)] \times F_{(i)Tl-Ln}^{(DT)} \exp[j(\mathbf{K}_{(i)Tl} + \mathbf{K}_{(i)Ln}) \cdot \mathbf{r}] + \sum_{n=1}^2 \mathbf{K}_{(i)Ln}^0 F_{(i)Ln-Ln}^{(DL)} \exp[j2\mathbf{K}_{(i)Ln} \cdot \mathbf{r}] + \sum_{n=1}^2 \mathbf{K}_{(i)Tn}^0 F_{(i)Tn-Tn}^{(DL)} \exp[j2\mathbf{K}_{(i)Tn} \cdot \mathbf{r}] + \sum_{l,n=1}^2 (\mathbf{K}_{(i)Tl}^0 + \mathbf{K}_{(i)Ln}^0) F_{(i)Tl-Ln}^{(DL)} \times \exp[j(\mathbf{K}_{(i)Tl} + \mathbf{K}_{(i)Ln}) \cdot \mathbf{r}] + \hat{z} F_{(i)L1-L2}^{(DL)} \exp(j2kz) + \hat{z} F_{(i)T1-T2}^{(DL)} \exp(j2kz) \quad (8)$$

其中  $\hat{z}$  为沿  $z$  轴的单位矢量;  $F_{(i)Pl-Qn}^{(DT)}$  和  $F_{(i)Pl-Qn}^{(DL)}$  ( $P, Q = T, L$ ) 的上标(DT)和(DL)分别表示驱动横波和驱动纵波, 其下标  $(i)Pl - Qn$  ( $i = 2, 1, 3$ ;  $P, Q = T, L$ ) 表示相应的驱动力分量源于  $\mathbf{u}_{(i)Pl}$  与  $\mathbf{u}_{(i)Qn}$  的非线性相互作用。式(8)表明第  $i$  层中有 10 个纵波和 4 个横波驱动力分量。由方程(7)和(8), 可得 14 个驱动二次谐波(见图 3)。

因固体层材料被认为是无频散的, 仅有  $\mathbf{u}_{(i)L1}$  或  $\mathbf{u}_{(i)L2}$  自作用产生的驱动二次谐波才具有积累性质。将第  $i$  层中具有积累性质的驱动二次谐波表示为  $\mathbf{u}_{(i)L1-L1}^{(DL)}$  和  $\mathbf{u}_{(i)L2-L2}^{(DL)}$ , 其形式解表示如下<sup>[6]</sup>:

$$\mathbf{u}_{(i)Ln-Ln}^{(DL)} = \mathbf{u}_{(i)Ln-Ln}^{(DL)} [\sin \theta_{(i)L} z + (-1)^n \cos \theta_{(i)L} y] \times \mathbf{K}_{(i)Ln}^0 \exp[j2\mathbf{K}_{(i)Ln} \cdot \mathbf{r}]$$



- 1:  $\mathbf{u}_{(i)L1-L2}^{(DL)}$ , 2:  $\mathbf{u}_{(i)T1-T2}^{(DL)}$ , 3:  $\mathbf{u}_{(i)T1-T1}^{(DL)}$ , 4:  $\mathbf{u}_{(i)T2-T2}^{(DL)}$ ,  
5:  $\mathbf{u}_{(i)T1-L1}^{(DT)}$ , 6:  $\mathbf{u}_{(i)T2-L2}^{(DT)}$ , 7:  $\mathbf{u}_{(i)T1-L1}^{(DL)}$ , 8:  $\mathbf{u}_{(i)T2-L2}^{(DL)}$ ,  
9:  $\mathbf{u}_{(i)T1-L2}^{(DT)}$ , 10:  $\mathbf{u}_{(i)T2-L1}^{(DT)}$ , 11:  $\mathbf{u}_{(i)T1-L2}^{(DL)}$ ,  
12:  $\mathbf{u}_{(i)T2-L1}^{(DL)}$ , 13:  $\mathbf{u}_{(i)L1-L1}^{(DL)}$ , 14:  $\mathbf{u}_{(i)L2-L2}^{(DL)}$

图 3 驱动二次谐波的波矢量与位移矢量

$$\mathbf{u}_{(i)Ln-Ln}^{(DL)} = \frac{[3\kappa_{(i)} + 4\mu_{(i)} + 2A_{(i)} + 6B_{(i)} + 2C_{(i)}]}{4(\kappa_{(i)} + 4\mu_{(i)}/3)} \times \left( \frac{K_{(i)L}}{k} \right)^2 (kd_i)^2 \left( \frac{u_{(i)Ln}}{d_i} \right)^2 \quad (9)$$

这里  $A_{(i)}$ 、 $B_{(i)}$  和  $C_{(i)}$  是固体层材料的三阶弹性常数,  $d_i$  为层厚。其他不具有积累效应的驱动二次谐波以  $\mathbf{u}_{(i)}^{(DP)}$  表示。

因复合固体层介质的体非线性, 伴随基频兰姆波的传播将会有二次谐波发生。对于复合固体层中的二次谐波, 存在边界条件: 在  $y = (d_2 + d_1/2)$  和  $y = -(d_3 + d_1/2)$  处, 二次谐波的应力为零; 在  $y = \pm d_1/2$  处, 二次谐波的应力以及二次谐波的位移沿  $y, z$  轴的分量应连续。一般地, 若仅仅考虑驱动二次谐波, 上述边界条件将不会得到满足。为使二次谐波的边界条件得到满足, 还需在复合固体层内引入“自由”二次谐波, 相当于式(7)右端为零时齐次波动方程的通解(之所以冠以“自由”二字, 是因为此时无相应的驱动项)<sup>[7]</sup>。参照文献[6], 给出第  $i$  层中的自由二次谐波的形式解为(见图 4):

$$\mathbf{u}_{(i)Tn}^{(F)} = \mathbf{u}_{(i)Tn}^{(FC)} + \mathbf{u}_{(i)Tn}^{(FP)} = \{ [\cos \theta_{(i)T} z + (-1)^{n-1} \sin \theta_{(i)T} y] \mathbf{u}_{(i)Tn}^{(FC)} + \mathbf{u}_{(i)T(n)}^{(FP)} \} \times$$

$$(-1)^n (\hat{x} \times \mathbf{K}_{(i)Tn}^0) \exp[j2\mathbf{K}_{(i)Tn} \cdot \mathbf{r}] \quad (10)$$

$$\mathbf{u}_{(i)Ln}^{(F)} = \mathbf{u}_{(i)Ln}^{(FC)} + \mathbf{u}_{(i)Ln}^{(FP)}$$

$$= \{[\cos\theta_{(i)L}y + (-1)^{n-1}\sin\theta_{(i)L}y]u_{(i)Ln}^{(FC)} + u_{(i)Ln}^{(FP)}\} \times \mathbf{K}_{(i)Ln}^0 \exp[j2\mathbf{K}_{(i)Ln} \cdot \mathbf{r}], n = 1, 2 \quad (11)$$

我们称  $\mathbf{u}_{(i)Ln}^{(FC)}$  和  $\mathbf{u}_{(i)Ln}^{(FP)}$  为自由传播的积累二次谐波(因有积累项),称  $\mathbf{u}_{(i)Tn}^{(FP)}$  和  $\mathbf{u}_{(i)Ln}^{(FP)}$  为自由传播的平面二次谐波(因无积累项)。

在第  $i$  层中,驱动二次谐波和自由二次谐波之矢量和构成了该层中总的二次谐波[以  $\mathbf{u}_{(i)}^{(2)}$  表示],其形式为:

$$\mathbf{u}_{(i)}^{(2)} = \mathbf{u}_{(i)}^{(2C)} + \mathbf{u}_{(i)}^{(2P)}$$

$$\mathbf{u}_{(i)}^{(2C)} = \sum_{n=1}^2 [\mathbf{u}_{(i)Ln}^{(DL)} + \mathbf{u}_{(i)Ln}^{(FC)} + \mathbf{u}_{(i)Tn}^{(FC)}] \quad (12)$$

$$\mathbf{u}_{(i)}^{(2P)} = \sum_{n=1}^2 [\mathbf{u}_{(i)Ln}^{(FP)} + \mathbf{u}_{(i)Tn}^{(FP)}] + \mathbf{u}_{(i)}^{(2DP)}$$

我们称  $\mathbf{u}_{(i)}^{(2C)}$  和  $\mathbf{u}_{(i)}^{(2P)}$  分别为固体层中的积累和平面二次谐波。在下面的分析过程中,问题的焦点主要集中在如何确定  $\mathbf{u}_{(i)}^{(2C)}$  (因其具有的积累性质)。若同时考虑复合固体层中的驱动与自由二次谐波,相应的二次谐波边界条件则有可能得到满足。对于固体层中的二次谐波应力,包含两部分;一是由构成兰姆波的部分平面波经非线性虎克定律而产生的二次谐波应力,二是由驱动与自由二次谐波经线性虎克定律产生的二次谐波应力<sup>[7]</sup>。根据二次谐波的边界条件,得到如下矩阵方程:

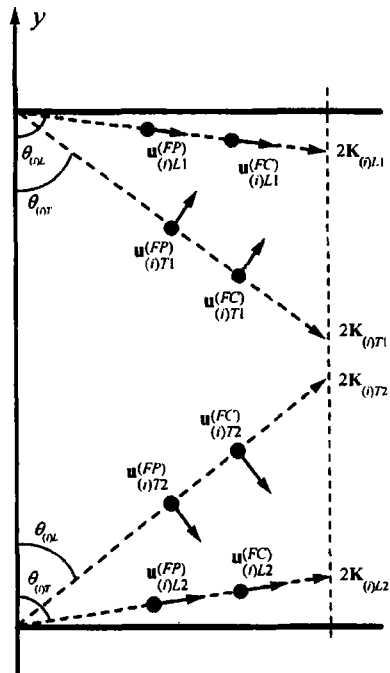


图 4 自由传播的积累与平面二次谐波的波矢量与位移矢量

$$[M(2\omega, 2k)] \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ u_{(i)Ln}^{(FC)} \cos\theta_{(i)L} + u_{(i)Ln-Ln}^{(DL)} \sin\theta_{(i)L} \\ u_{(i)Tn}^{(FC)} \cos\theta_{(i)T} \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \approx +$$

$$[M(2\omega, 2k)] \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ u_{(i)Ln}^{(FP)} \\ u_{(i)Tn}^{(FP)} \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ R_{(i)} \\ R_{(i)} \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (13)$$

其中系数矩阵  $[M(2\omega, 2k)]$  可由  $[M(\omega, k)]$  求得,只要将  $2kd_i$  代替  $[M(\omega, k)]$  中的  $kd_i$  即可;式(13)的右端是  $12 \times 1$  的矩阵,其各个元与部分平面波有关(因非线性虎克定律),还与驱动积累二次谐波有关(不包含  $z$  的项一律移到右端)。方程(3)应在边界的各处(对不同的  $z$ )得到满足,因此有<sup>[6]</sup>:

$$[M(2\omega, 2k)] \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ u_{(i)Ln}^{(FC)} \cos\theta_{(i)L} + u_{(i)Ln-Ln}^{(DL)} \sin\theta_{(i)L} \\ u_{(i)Tn}^{(FC)} \cos\theta_{(i)T} \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \approx$$

$$= \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$[M(2\omega, 2k)] \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ u_{(i)Ln}^{(FP)} \\ u_{(i)Tn}^{(FP)} \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ R_{(i)} \\ R_{(i)} \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (15)$$

与单层固体板中兰姆波非线性的分析过程相似,  $|M(\omega, k)|=0$  确定了基频兰姆波的频散曲线,由  $|M(2\omega, 2k)|=0$  可求得二倍频兰姆波的频散关系。一般情况下,由  $|M(\omega, k)|=0$  不可能推得  $|M(2\omega, 2k)|=0$ 。因此,对于复合固体层中传播的一定模式兰姆波,方程(14)只能有零解,即无积累二次谐波发生。

通常人们仅对具有积累效应的二次谐波(基频

波与二次谐波间的相位满足匹配条件)的发生感兴趣。这是因为在基频波的传播过程中,在各个场点因非线性虎克定律而存在一个二阶驱动力(其作用就相当于一个二次谐波辐射源),由该二阶驱动力激发出相应的二次谐波,若每个场点激发出的二次谐波之间相位匹配(无相差),则它们就能同相叠加,表现出随传播距离积累增长的强烈非线性效应。鉴于此,要使复合固体层中存在强烈的非线性效应(表现为积累二次谐波的发生),必须 $|M(2\omega, 2k)|=0$ 与 $|M(\omega, k)|=0$ 同时满足,在下面的分析中,先假定这一条件是成立的。

当 $|M(2\omega, 2k)|=0$ 与 $|M(\omega, k)|=0$ 同时满足时,由式(14)可得到如下关系式:

$$\mathbf{u}_{(i)z}^{(2C)} = \sum_{n=1}^2 \begin{bmatrix} \sin^2 \theta_{(i)L} u_{(i)Ln-Ln}^{(DL)} \exp[(-1)^n 2j\alpha_{(i)L} ky] \\ + \sin \theta_{(i)L} \cos \theta_{(i)L} u_{(i)Ln}^{(FC)} \exp[(-1)^n 2j\alpha_{(i)L} ky] \\ + \cos^2 \theta_{(i)L} u_{(i)Ln}^{(FC)} \exp[(-1)^n 2j\alpha_{(i)L} ky] \end{bmatrix} z + \sum_{n=1}^2 (-1)^{n-1} \begin{bmatrix} -\sin \theta_{(i)L} \cos \theta_{(i)L} u_{(i)Ln-Ln}^{(DL)} \exp[(-1)^n 2j\alpha_{(i)L} ky] \\ + \sin^2 \theta_{(i)L} u_{(i)Ln}^{(FC)} \exp[(-1)^n 2j\alpha_{(i)L} ky] \\ + \sin \theta_{(i)L} \cos \theta_{(i)L} u_{(i)Ln}^{(FC)} \exp[(-1)^n 2j\alpha_{(i)L} ky] \end{bmatrix} y \quad (17)$$

对于积累二次谐波,在激发源处二次谐波的振幅应为零。为简单起见,设激发源是一平行于x轴的线源,且位于 $(y, z) = (\xi, 0)$ 处。据初始条件,由式(17)可得<sup>[4]</sup>:

$$\sum_{n=1}^2 (-1)^{n-1} \begin{bmatrix} -\sin \theta_{(i)L} \cos \theta_{(i)L} u_{(i)Ln-Ln}^{(DL)} \exp[(-1)^n 2j\alpha_{(i)L} k\xi] \\ + \sin^2 \theta_{(i)L} u_{(i)Ln}^{(FC)} \exp[(-1)^n 2j\alpha_{(i)L} k\xi] \\ + \sin \theta_{(i)L} \cos \theta_{(i)L} u_{(i)Ln}^{(FC)} \exp[(-1)^n 2j\alpha_{(i)L} k\xi] \end{bmatrix} = 0 \quad (18)$$

将式(16)代入式(18),经过一个繁琐的推导过程,得到:

$$\mathbf{u}_{(3)T2}^{(FC)} = \frac{\sum_{n=1}^2 (-1)^{n-1} \tan \theta_{(i)L} u_{(i)Ln-Ln}^{(DL)} \exp[(-1)^n 2j\alpha_{(i)L} k\xi]}{\cos \theta_{(3)T} \sum_{n=1}^2 (-1)^{n-1} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin^2 \theta_{(i)L}}{\cos \theta_{(i)L}} E_{(i)Ln}^{(2\omega)} \exp[(-1)^n 2j\alpha_{(i)L} k\xi] \\ + \sin \theta_{(i)L} E_{(i)Tn}^{(2\omega)} \exp[(-1)^n 2j\alpha_{(i)L} k\xi] \end{array} \right\}} \quad (19)$$

将式(19)再代回式(16),得到自由传播的各个积累二次谐波的振幅。在第*i*层中总的积累二次谐波(包括驱动与自由二次谐波)表示为:

$$\mathbf{u}_{(i)}^{(2C)} = \sum_{n=1}^2 \begin{bmatrix} u_{(i)Ln-Ln}^{(DL)} [\sin \theta_{(i)L} z + (-1)^n \cos \theta_{(i)L} y] \\ + u_{(i)Ln}^{(FC)} [\cos \theta_{(i)L} z + (-1)^{n-1} \sin \theta_{(i)L} y] \end{bmatrix} \mathbf{K}_{(i)Ln}^0 \exp[2j\mathbf{K}_{(i)Ln} \cdot \mathbf{r}] + \sum_{n=1}^2 u_{(i)Tn}^{(FC)} [\cos \theta_{(i)T} z + (-1)^{n-1} \sin \theta_{(i)T} y] (-1)^n [\hat{x} \times \mathbf{K}_{(i)Tn}^0] \exp[2j\mathbf{K}_{(i)Tn} \cdot \mathbf{r}] \quad (20)$$

其中 $u_{(i)Ln-Ln}^{(DL)}$  ( $i=2,1,3; n=1,2$ )由式(9)给出。容易看出 $u_{(3)T2}^{(FC)}$ 与激发线源的位置 $\xi$ 有关,因此在复合固体层中的积累二次谐波的振幅就与激发源的位置有关。式(20)满足边界和初始条件,它就是待求的积累二次谐波之解。

一般说来,式(15)右端的行列式的各个元不为

$$\begin{bmatrix} \dots \\ u_{(i)Ln}^{(FC)} \\ u_{(i)Tn}^{(FC)} \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ E_{(i)Ln}^{(2\omega)} u_{(3)T2}^{(FC)} \cos \theta_{(3)T} / \cos \theta_{(i)L} - u_{(i)Ln-Ln}^{(DL)} \tan \theta_{(i)L} \\ E_{(i)Tn}^{(2\omega)} u_{(3)T2}^{(FC)} \cos \theta_{(3)T} / \cos \theta_{(i)T} \\ \dots \end{bmatrix} \quad (16)$$

上式中的常数 $E_{(i)Ln}^{(2\omega)}$ 和 $E_{(i)Tn}^{(2\omega)}$  ( $i=2,1,3; n=1,2; E_{(3)T2}^{(2\omega)}=1$ )容易从式(14)中的任意11个方程求得。第*i*层中积累二次谐波的位移矢量沿z轴的分量 $u_{(i)z}^{(2C)}$  ( $i=2,1,3$ )表示如下[忽略 $\exp(2jkz - 2j\omega t)$ ]:

零,也就是说,自由平面二次谐波之解在这里不能被确定。但是,考虑到积累二次谐波随传播距离积累增长的性质,当二次谐波发生并传播一定距离后,积累二次谐波将占明显的主导地位,自由平面二次谐波之解不能确定,就变得并不重要。

对于声波在介质中传播的非线性问题,人们对积

累二次谐波非常关注,当基频波与二倍频波之间满足相位匹配(相速相等)时,相应的二次谐波振幅随传播距离呈线性积累增长。在离激发源最初的一段距离内,积累二次谐波的振幅远小于基频波振幅,此时可以认为基频波振幅保持不变,或者基频波与谐波间无能量耦合。在积累二次谐波传播一定距离后,其相应的振幅因积累增长效应而变得较明显,此时基频波的振幅就不能视为恒定。因此,式(20)仅在离激发源最初的一段距离内成立。尽管如此,认为基频波与二次谐波间无能量耦合,可简化分析过程,并且在一定程度上是合理的,由此得到的分析过程能很好地揭示出复合固体层中积累二次谐波发生与传播的物理过程。

### 3 数值研究

我们在所得结果的基础上进行一些数值研究,以便对积累二次谐波的性质有更深刻的了解。选择一种在航空工业中较普遍的复合固体层:铝板-环氧胶-铝板,其中铝的参数为: $\rho = 2700\text{kg/m}^3$ ,  $c_L = 6350\text{m/s}$ ,  $c_T = 3100\text{m/s}$ ;环氧胶的参数为: $\rho = 1120\text{kg/m}^3$ ,  $c_L =$

$2383\text{m/s}$ ,  $c_T = 1071\text{m/s}$ 。根据介质的参数和复合层各层的厚度,据 $|M(\omega, k)| = 0$ ,容易求得基频兰姆波的频散关系。积累二次谐波的发生需 $|M(2\omega, 2k)| = 0$ 和 $|M(\omega, k)| = 0$ 同时满足,基频和二倍频兰姆波的频散曲线如图5所示,两组频散曲线的交点即是待确定的积累二次谐波的发生条件(据图中的交点坐标,可求得一定归一化厚度条件下兰姆波的相速)。

基频和二倍频兰姆波的声场对描述兰姆波的性质非常重要。我们可把式(4)改写为:

$$\begin{bmatrix} \dots \\ u_{(i)Ln} \\ u_{(i)Tn} \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ E_{(i)Ln}^{(\omega)} \\ E_{(i)Tn}^{(\omega)} \\ \dots \end{bmatrix} u_{(3)T2} \quad (21)$$

上式表明复合固体层中各层的部分平面波振幅可用 $u_{(3)T2}$ 予以表示。对于某个兰姆波模式,当 $d_1/d_2$ 和 $d_1/d_3$ 给定时,由频散关系容易得到 $(kd_2, c)$ 。常数 $E_{(i)Ln}^{(\omega)}$ 和 $E_{(i)Tn}^{(\omega)}$  ( $i=1,2,3; n=1,2; E_{(3)T2}^{(\omega)}=1$ )可由式(4)中的任意11个方程求得。将式(21)代入式

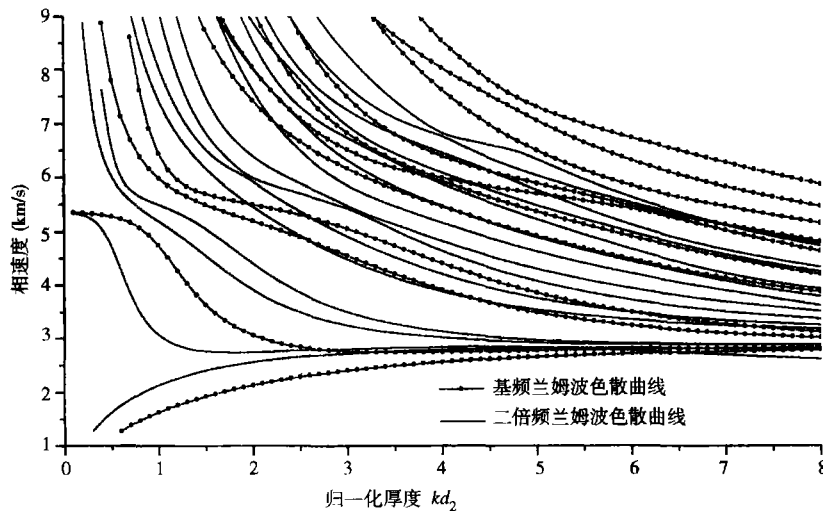


图5 积累二次谐波的发生条件( $d_1/d_2=0.1$ ,  $d_1/d_3=0.12$ )

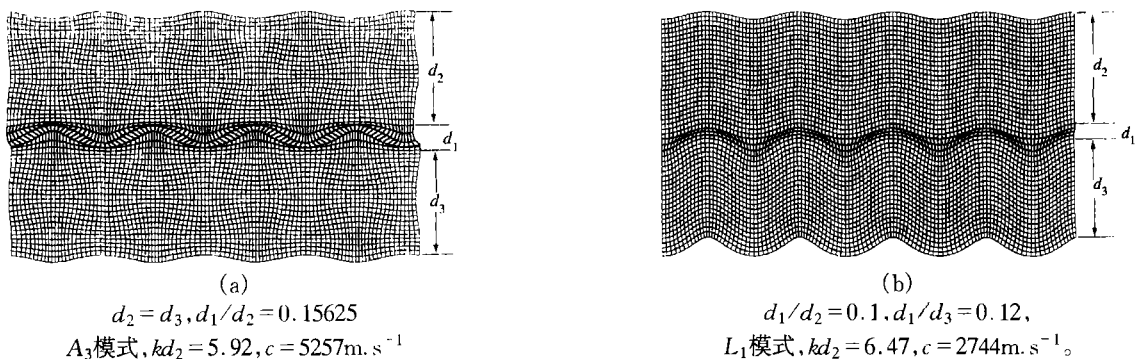


图6 基频兰姆波的声场算例

(5)和式(6),就得到以  $u_{(3)T2}$  表示的基频兰姆波声场。图6给出两个计算实例。

接下来计算积累二次谐波的声场。考虑到式(21),  $u_{(i)Ln-Ln}^{(DL)}$  可变形为:

$$u_{(i)Ln-Ln}^{(DL)} = \frac{[3\kappa_{(i)} + 4\mu_{(i)} + 2A_{(i)} + 6B_{(i)} + 2C_{(i)}]}{4(\kappa_{(i)} + 4\mu_{(i)}/3)} \cdot \left(\frac{c^2}{c_{(i)L}^2}\right) (kd_i)^2 \left(\frac{E_{(i)}^{(\omega)} L_n}{(d_i/d_3)}\right)^2 \left(\frac{u_{(3)T2}}{d_3}\right)^2 \quad (22)$$

若激发源位于第  $i$  层的  $(y, z) = (\xi, 0)$  处,由式(19)求得  $u_{(3)T2}^{(FC)}$ ,所有积累二次谐波的振幅经式(16)可被全部确定(相应于  $[u_{(3)T2}/d_3]^2$ )。将式(20)沿  $y, z$  坐标轴分解,得到第  $i$  层中积累二次谐波的法向和切向分量(以  $u_{(i)y}^{(2C)}$  和  $u_{(i)z}^{(2C)}$  表示)。式(22)的尺度以  $[u_{(3)T2}/d_3]^2$  表示,表明式(20)中  $u_{(i)Tn}^{(FC)}$  和  $u_{(i)Ln}^{(FC)}$  的尺度也是以  $[u_{(3)T2}/d_3]^2$  表示的,则  $u_{(i)y}^{(2C)}$  和  $u_{(i)z}^{(2C)}$  的单位应是  $y[u_{(3)T2}/d_3]^2$  或  $z[u_{(3)T2}/d_3]^2$ ,进一步可变为  $(y/d_3)(u_{(3)T2}^2/d_3)$  或  $(z/d_3)(u_{(3)T2}^2/d_3)$ 。则积累二次谐波的振幅单位最终为  $u_{(3)T2}^2/d_3$ 。

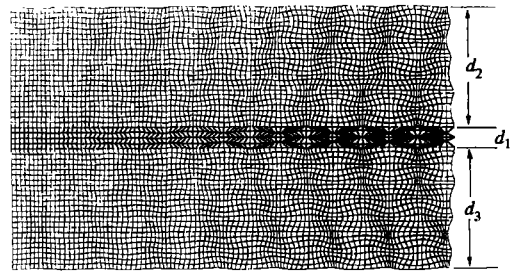
复合固体层介质的三阶弹性常数  $(2A + 6B + 2C)$ :铝是  $-2230\text{GPa}$ ,环氧胶是  $-89\text{GPa}$ <sup>[8]</sup>。据由式(20)分解得到的  $u_{(i)y}^{(2C)}$  和  $u_{(i)z}^{(2C)}$ ,图7给出了几个积累二次谐波声场的实际算例。对于对称结构的复合固体层(见图7a),其声场分布也是对称的;对于非对称结构的复合固体层,从图(7b)和(7c)可以看出,声场分布也是非对称的,且与激发源所处位置有关。

#### 4 结束语

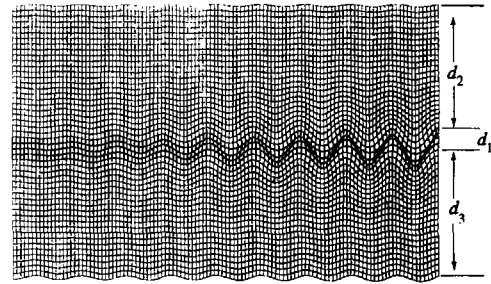
本文提出一种分析复合固体层中兰姆波的积累二次谐波发生与传播的方法。结果表明,可以发现一些特殊情形,使基频和二倍频兰姆波的相速度相等,两者间满足相位匹配条件,二次谐波表现出随传播距离积累增长的性质。对于给定的复合固体层,给出了积累二次谐波发生条件的计算实例。同时,还基于二次谐波的边界条件和初始条件,推导出积累二次谐波的形式解。声场的数值计算结果显示积累二次谐波声场的畸变特性,且还揭示出声场分布与激发源位置有关。文中所求得积累二次谐波的发生条件与形式解,可望应用于复合固体层的非线性无损评价。

#### 参考文献:

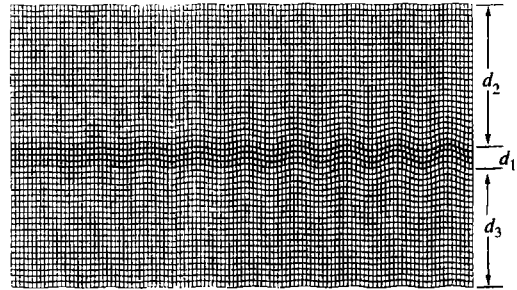
[1] Price D C, Martin B J, Scott D A. Ultrasonic guided waves for inspection of bonded panels [J]. Acoustics Australia, 1999, 27(3): 95-101.  
 [2] Yongping Zheng, Roman Gr. Maev, Igor Yu Solodov. Nonlinear acoustic applications for material characterization: a review [J]. Can. J. Phys., 1999, 77(6): 927-967.



(a)  $d_2 = d_3, d_1/d_2 = 0.15625, A_5$  模式,  
 $kd_2 = 5.70, c = 6730\text{m/s}, \xi = d_2 + d_1/2$ ;



(b)  $d_1/d_2 = 0.1, d_1/d_3 = 0.12, L_2$  模式,  
 $kd_2 = 6.71, c = 2823\text{m/s}, \xi = d_2 + d_1/2$ ;



(c)  $d_1/d_2 = 0.1, d_1/d_3 = 0.12, L_2$  模式,  
 $kd_2 = 6.71, c = 2823\text{m/s}, \xi = -d_3 - d_1/2$ 。

图7 积累二次谐波的声场算例

[3] Ginsberg J H, Shu K T. The role of nonlinearities in propagation, reflection, and transmission of stress waves and possible application to NDE [J]. Rev. Prog. QNDE 1991, 10B: 1829-1836.  
 [4] Deng Mingxi. Cumulative second-harmonic generation of Lamb-mode propagation in a solid plate [J]. J. Appl. Phys., 1999, 85(6): 3051-3058.  
 [5] Auld B A. Acoustic fields and waves in solids [M]. New York: John Wiley & Sons Inc(chapter 10)., 1973. 63-214.  
 [6] Zhou S, Shui Y. Nonlinear reflection of bulk acoustic waves at an interface [J]. J. Appl. Phys., 1992, 72(11): 5070-5080.  
 [7] Shui Y, Solodov I Y. Nonlinear reflection of bulk waves in solids [A], presented at 2nd Western Pacific Regional Acoustic Conference[C], Hong Kong, 1985. 188-192.  
 [8] Hearmon R S F. Landolt-Bornstein Numerical data and functional relationship in science and technology [M]. Group III. Berlin: Springer, 1979.245-286.