文章编号: 1000-3630(2003) 01-0001-03

# 色散介质中积累二次谐波的发生

邓明晰
(重庆后勤工程学院, 400016　重庆)

摘　要: 对色散介质中平面波的积累二次谐波发生问题进行了研究, 给出了形式简捷的积累二次谐波振幅和相位的解析表达式, 还给出积累二次谐波发生的临界距离。据本文的分析方法, 能很好地理解色散介质中积累二次谐波发生的物理过程。

关键词: 色散介质; 二次谐波; 积累效应
中图分类号: O422.7　　文献标识码: A

# Generation of cumulative second harmonic in a dispersion medium

DENG Ming-xi
(Logistics Engineering University, Chongqing 400016, China)

**Abstract:** Generation of cumulative second harmonics of a planar wave in a dispersive medium is examined in this paper. Analytical expressions of cumulative second-harmonic amplitude and phase with a simple form are derived. The critical distance of cumulative second-harmonic generation is determined. With the presented analysis method it is easy to understand the physical process of generation of cumulative second harmonic in a dispersive medium.

**Key words:** dispersion medium; second harmonic; cumulative effect

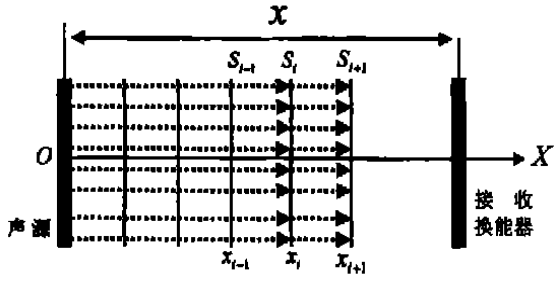
## 1　引　言

声纵波在非色散的液体或固体介质中传播时, 因介质的体非线性, 伴随基频波的传播将有非线性效应出现。对于液体介质, 文献[1]给出了多种解的表述结果。若采用二阶微扰方法, 因基频波与二次谐波相速度相等, 两者间满足相位匹配条件, 可得到二次谐波振幅随传播距离线性积累增长的解析解, 该解仅在场点距声源的一定距离内成立。尽管如此, 该解却能很好地描述基频波在传播过程中, 二次谐波的积累过程。通常情况下, 实际介质可能具有不同程度的色散, 此时基频波与二次谐波之间不满足相位匹配条件, 二次谐波的振幅不再随传播距离线性增长。对于色散程度不大的介质, 基频波(纵波)与二次谐波的相速度相差不大或比较接近, 在距辐射声源的一定距离内, 两者的相位失配并不严重, 二次谐波仍有可能具有积累性质。本文拟对色散介质中二次谐波的积累性质进行探讨, 为简化分析过程, 基频波设为平面波并假定在二次谐波的发生过程中, 二次谐波能量远小于基频波的能量、介质均匀、忽略声波在其中传播的能量损耗[2]。

收稿日期: 2001-03-05; 修回日期: 2001-06-20
基金项目: 国家自然科学基金支持(10004016)
作者简介: 邓明晰(1965-), 重庆市人, 教授, 研究方向: 超声微传感和非线性声学。

## 2　基本理论

本文只考虑基频平面波为纵波的情形。设平面波声源被角频率为 $\omega$ 的正弦信号在 $t=0$ 时刻开始激发, 平面波以声速 $c^{(\omega)}$ 沿 $X$ 轴正向传播, 声源与所辐射的平面波之间的关系如图 1 所示。在 $t$ 时刻平面波传播至坐标为 $x_i$ 的波前 $S_i$ 处, 该波前处质点的振动引起邻近质点的振动, 在 $t+\Delta t$ 时刻, 波前移至坐标为 $x_{i+1}$ 的 $S_{i+1}$ 处(见图 1)。对于角频率为 $\omega$ 的平面基频波, 介质中没有激发声源, 平面波的解满足齐次波动方程。




基频波 $\rightarrow t_i^{(\omega)}=(x_{i+1}-x_i)/c^{(\omega)}$
二次谐波 $\rightarrow t_i^{(2\omega)}=(x_{i+1}-x_i)/c^{(2\omega)}$
图 1　解释平面二次谐波的发生用图

因介质的体非线性, 在基频波沿 $X$ 轴正向的传播过程中, 将伴随有二次谐波的发生。考虑 $t$ 时刻平面波传播至 $S_i$ 处, 在二阶近似下, 据非线性虎克

定律, 在波前 $S_i$ 处将得到一个二倍频的驱动应力, 其作用相当于一个二倍频的辐射源, 向 $X$ 轴正向辐射出一个平面二次谐波[3]; 在 $t+\Delta t$ 时刻, 基频波传播到波前 $S_{i+1}$处, 介质的体非线性使得在 $S_{i+1}$处也存在一个二倍频驱动应力, 同样该二倍频应力(视为二倍频辐射源)也将向 $X$ 轴正向辐射另一个平面二次谐波。在基频波沿 $X$ 轴正方向的传播过程中, 各个时刻的波前都将辐射出一个沿 $X$ 轴正向传播的平面二次谐波。在接收换能器处(见图 1)所接收到的二次谐波是各个时刻波前(因介质体非线性, 各个波前视为二次谐波的辐射源)辐射的平面二次谐波的叠加。

当考虑介质的色散特性时, 基频波相速度 $c^{(\omega)}$ 与二次谐波相速度 $c^{(2\omega)}$不相等, 这将造成基频波与二次谐波的相位不匹配。考虑基频波从波前 $S_i$($t$ 时刻)传播至波前 $S_{i+1}$($t+\Delta t$ 时刻)的情形, 所需时间为:

$$t_i^{(\omega)} = (x_{i+1} - x_i)/c^{(\omega)} \qquad (1)$$

$S_i$ 辐射出的平面二次谐波从 $S_i$ 传播至 $S_{i+1}$, 其传播时间为:

$$t_i^{(2\omega)} = (x_{i+1} - x_i)/c^{(2\omega)} \qquad (2)$$

因此, $S_i$ 和 $S_{i+1}$所辐射出的平面二次谐波之间存在一个相位差 $\Delta\phi_i$, 其值为:

$$\Delta\phi_i = 2\omega\Delta t_i, \quad \Delta t_i = t_i^{(2\omega)} - t_i^{(\omega)} \qquad (3)$$

图 1 给出了式(1) ~ 式(3)中各量之间的关系, 下面针对两种情形进行讨论。

(1) $\Delta\phi_i = 0$

此情形表明基频波和二次谐波的相速度相等, 图 1 中各个时刻对应的波前因介质体非线性所辐射的平面二次谐波之间无相位差, 这些平面二次谐波在图 1 中的接收换能器处同相位叠加。若各个时刻对应的波前所辐射的平面二次谐波用矢量 $A_i^{(2\omega)}$($i = 1, 2, , N$, $N$ 对应接收换能器所在位置的波面)表示, 对于 $\Delta\phi_i = 0$ 情形, 在接收换能器处平面二次谐波的叠加如图 2 所示。因忽略了介质的损耗, 可以认为 $A_i^{(2\omega)}$ 的模(平面二次谐波的振幅)保持不变。图 1 中声源与接收换能器之间的距离为 $x$, 由文献[2~ 4]可得换能器所在位置的二次谐波振幅:

$$|A^{(2\omega)}| = \frac{1}{2}\Gamma[\omega/c^{(\omega)}]^2 x u_0^2 \qquad (4)$$

其中 $\Gamma$ 是与介质非线性参量有关的常数(对于液体 $\Gamma = 1 + \frac{1}{2}B/A$; 对于固体 $\Gamma = \left|3/2 + \frac{A + 3B + C}{C_{11}}\right|$), $u_0$ 为基频波位移振幅。对于均匀介质, 平面波传播的距离 $x$ 与传播路径中所包含波阵面的个数成正比, 据此容易理解二次谐波线性积累增长的物理过程。

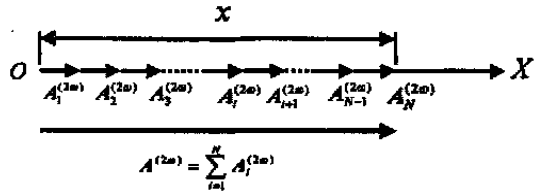



图 2 基频波和二次谐波相位匹配时积累二次谐波的发生

(2) $\Delta\phi_i \neq 0$

此时在各个时刻的波前因介质体非线性所辐射的平面二次谐波(图 1)与下一个时刻波前所辐射的平面二次谐波不同相, 接收换能器所在位置的二次谐波 $A^{(2\omega)}$ 如图 3(a)所示, 图中还给出了 $S_i$、$S_{i+1}$所辐射的二次谐波 $A_i^{(2\omega)}$、$A_{i+1}^{(2\omega)}$ 与 $\Delta\phi_i$ 之间的关系。图 3(a)中 $A_1^{(2\omega)}$ 与 $A_N^{(2\omega)}$ 的相位差 $\Delta\phi$ 为:

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \sum_{i=1}^{N}\Delta\phi_i = 2\omega\sum_{i=1}^{N}\Delta t_i \\ &= 2\omega\left[\frac{1}{c^{(2\omega)}} - \frac{1}{c^{(\omega)}}\right]\sum_{i=1}^{N}(x_{i+1} - x_i)\end{aligned} \qquad (5)$$

实际上, 式(5)中的 $x_1 = 0$, $x_N = x$, 因此有 $\Delta\phi = 2\omega x[c^{(\omega)} - c^{(2\omega)}]/c^{(\omega)}c^{(2\omega)}$。

当图 1 中的 $x_i \to x_{i+1}$时, 有 $\Delta\phi_i \to 0$, 图 3(a)中各个矢量 $A_i^{(2\omega)}$ 叠加的折线图形变为图 3b 中的弧线 $OMN$。实际上, 弧线 $OMN$ 的长度就是基频波与二次谐波相位匹配时接收换能器所在处的二次谐波振幅, 也就是式(4)的右端。在图 3(b)中, $C$ 为弧线 $OMN$ 对应的圆心, $CO = CN$, 且 $CO \perp OD$, $CN \perp \overline{ND}$。据简单的几何关系, 可得$\angle OCN = \Delta\phi$。在基频波与二次谐波相位失配时, 换能器所在处二次谐波的振幅为:

$$\begin{aligned}|A^{(2\omega)}| &= 2CO\sin\frac{\Delta\phi}{2} = 2\frac{OMN}{\Delta\phi}\sin\frac{\Delta\phi}{2} \\ &= \frac{\Gamma[\omega/c^{(\omega)}]^2}{4\omega\left[\frac{1}{c^{(2\omega)}} - \frac{1}{c^{(\omega)}}\right]}u_0^2\sin\left[\omega\left(\frac{1}{c^{(2\omega)}} - \frac{1}{c^{(\omega)}}\right)x\right]\end{aligned} \qquad (6)$$

若 $c^{(\omega)} \to c^{(2\omega)}$, 上式变回式(4), 表明基频波与二次谐波相位匹配是上式的一个特殊情况。从式(6)易得到, 当 $\Delta\phi = \pi$ 时, $|A^{(2\omega)}|$ 达到极大, 此时相当于图 3(a)中的$|A_1^{(2\omega)}|$ 与$|A_N^{(2\omega)}|$ 反相(此后, 二次谐波的振幅开始减小)。对于 $\Delta\phi \leqslant \pi$ 的情形, 即使基频波与二次谐波相位不匹配, 伴随基频波传播的二次谐波仍具有(非线性)积累增长的性质。可把$|A^{(2\omega)}|$ 达到极大的距离 $X_m$ 视为积累效应形成的临界距离, 在该距离

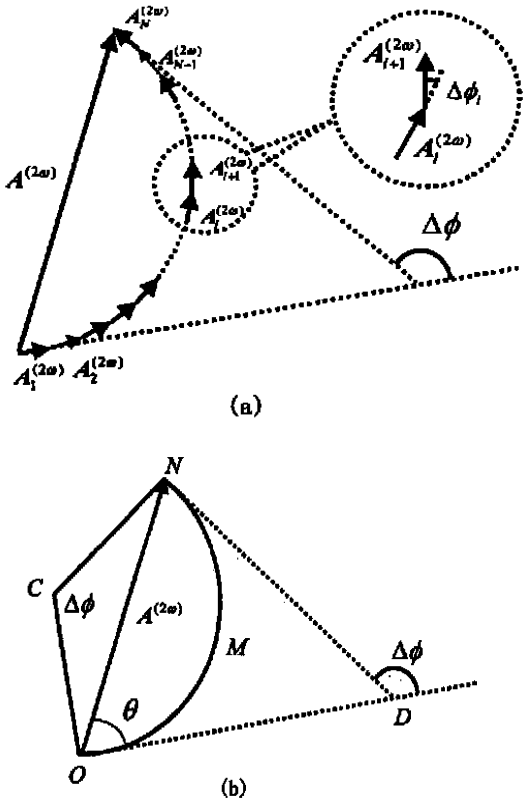



图 3　基频波和二次谐波相位失配时积累二次谐波的发生

离内, 二次谐波振幅随传播距离呈非线性积累增长, 由式(5)给出 $X_m$:

$$X_m = \frac{\pi}{2\omega} \frac{c^{(\omega)} c^{(2\omega)}}{| c^{(\omega)} - c^{(2\omega)} |} \tag{7}$$

介质的色散程度可用 $\Delta c / c^{(\omega)} = | c^{(2\omega)} - c^{(2\omega)} | / c^{(\omega)}$ 进行表征。式(6)表明临界距离 $X_m$ 与基频波角频率成反比, 与介质的色散程度成反比。对色散程度较小的介质, 有 $c^{(\omega)} \approx c^{(2\omega)}$, 式(7)可变形为 $X_m = (\pi / 2\omega)[c^{(\omega)}]^2 / | \Delta c |$。只要已知基频波的频率和介质的色散特性, 很容易给出二次谐波出现积累增长效应的临界距离。

在图 1 中接收换能器所在处的二次谐波相位应为图 3(b)中的 $\theta$[扣除二次谐波的传播因子 $\exp 2j(Kx - \omega t)$], 由简单的几何关系, 得

$$\theta = \frac{\Delta\theta}{2} = \omega x \frac{[c^{(\omega)} - c^{(2\omega)}]}{c^{(\omega)} c^{(2\omega)}} \tag{8}$$

至此, 得到了色散介质中具有积累效应的二次谐波的振幅和相位解析解。在临界距离 $X_m$ 内, 积累二次谐波振幅与传播距离呈正弦关系, 相位与传播距离呈线性关系。根据分析问题的假定条件, 在 $X_m$ 内, 二次谐波能量应远小于基频波能量。

## 3　结束语

本文在二阶近似下, 研究了均匀色散介质中伴随平面基频波传播的积累二次谐波, 得到了二次谐波的解析解和相应的相位关系, 同时还给出了色散介质中出现积累二次谐波效应的临界距离。本文的分析过程较为简捷, 物理图象清晰, 从中可很好地理解色散介质中二次谐波积累效应的发生过程。此外, 本文的分析方法和过程, 对研究声波导中色散导波的积累效应, 或许可给出有益的启示。

参考文献:

[1] Beyer R T. Nonlinear acoustics-physical acoustics II(B)[M](Edited by Mason W P). New York: Academic Press, 1965: 231-264.

[2] Zhou Shengqing, Shui Yongan. Nonlinear reflection of bulk acoustic waves at an interface[J]. J. Appl. Phys., 1992, 72(11): 5070-5080.

[3] Zarembo L K, Krasil'nikov V A. Nonlinear phenomena in the propagation of elastic waves in solids[J]. Soviet Physics USPEKHI, 1971, 13(6): 778-797.

[4] 钱祖文. 非线性声学[M]. 北京: 科学出版社, 1992: 165-197.

学术交流

# 上海市声学学会医学超声专业委员会学术会议暨中青年学术论坛召开

上海市声学学会医学超声专业委员会学术会议暨中青年学术论坛于 2003 年 3 月 25 日在上海市科委会议中心技贸宾馆举行。来自上海复旦大学、交通大学、同济大学、第二军医大学等附属医院和市及区县各级医院的 190 名超声专业工作者参加了会议。上海市声学学会副理事长、医学超声专业委员会主任委员胡兵教授主持了会议。上海市声学学会理事长钱梦禄教授、前理事长冯绍松研究员、首任医学超声专业委员会主任委员周永昌教授、医学超声专业委员会前任主任委员徐智章教授致辞并发表了热情洋溢的讲话, 声学学会秘书长龚农斌教授、著名超声专家朱世亮教授、赵宝珍教授、工业超声专业委员会寿文德教授等出席了会议。

何还珠教授、王文平教授先后主持了学术论坛, 六位中青年专家寿文德教授、王文平教授、常才教授、胡兵教授、陈亚青教授和王怡主任分别介绍了国内外最新研究成果和临床应用现状, 使代表受益匪浅。会议场面热烈, 学术气氛浓厚, 该次会议是近年来医学超声界很少见到的, 受到了与会者的高度评价。会议期间, 讨论了医学超声专业委员会的组织工作。

本次会议得到了上海美众公司、GE 公司中国超声部的大力支持。

朱家安