

# 有限元与声辐射模态的薄板声辐射灵敏度分析

赵志高<sup>1</sup>, 黄其柏<sup>1</sup>, 何 锧<sup>2</sup>, 丁律辉<sup>1</sup>

(1. 华中科技大学机械科学与工程学院, 武汉 430074; 2. 华中科技大学土木工程与力学学院, 武汉 430074)

**摘要:** 采用有限元与声辐射模态方法研究了薄板声辐射的灵敏度。应用有限元方法求出结构的速度分布后, 利用 Rayleigh 积分求出薄板的声压, 然后将薄板的声辐射功率表示为薄板速度分布的正定厄米特二次型; 将薄板的声辐射功率对设计变量求偏导, 薄板声辐射的灵敏度转化为阻抗矩阵的灵敏度与速度分布的灵敏度, 最后通过声辐射模态理论和有限元方法可以分别求出结构阻抗矩阵的灵敏度与速度分布的灵敏度。以四边简支的薄板作为数值算例, 对所提出的方法进行了验证。

**关键词:** 声辐射模态; 声辐射灵敏度; 薄板

中国分类号: TB53

文献标识码: A

文章编号: 1000-3630(2008)-03-0464-05

## Acoustic sensitivity analysis of thin plate by using FEM and sound radiation mode method

ZHAO Zhi-gao<sup>1</sup>, HUANG Qi-bai<sup>1</sup>, HE Zeng<sup>2</sup>, DING Lü-hui<sup>1</sup>

(1. College of Mechanical Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China; 2. College of Civil Engineering and Mechanics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

**Abstract:** In this paper, the sound radiation sensitivity of thin plate is studied by using FEM and sound radiation mode method. The velocity distribution of structure is solved by FEM and the surface sound pressure is computed by Rayleigh integral respectively. Then, the sound power can be expressed as a positive definite and Hermitian. Finally, the sound radiation sensitivity can be expressed as sensitivities of the impedance matrix and the velocity of plate by derivation of sound radiation power with respect to design variables, which can be solved by sound radiation mode theory and FEM. Taken a simple supported thin plate as a simulation example, the simulation results show the validity of the presented method.

**Key words:** sound radiation mode; sound radiation sensitivity; thin plate

## 1 引言

薄板结构的声辐射一直是工程噪声研究的重点之一, 其辐射机理及其辐射规律一直是众多学者的研究重点。20世纪90年代兴起的声辐射模态理论<sup>[1-8]</sup>, 利用结构的声辐射阻抗矩阵将结构的声辐射功率表示为结构表面速度分布的二次型, 并利用阻抗矩阵的正定厄米特性质, 实现结构声辐射的解耦, 为结构

声辐射的求解及其控制提出了新的思路。沿着这种思路, 众多学者对薄板结构的声辐射效率及其结构的主动控制进行了研究<sup>[2,5,6,8]</sup>。

结构声学设计灵敏度 ADS (Acoustic Design Sensitivity) 分析求解的是结构修改后其声辐射特性的变化, 能够预测什么样的结构其声辐射较小, 这对于工程实际设计而言, 有着重要意义。本文利用声辐射模态理论与结构有限元分析, 研究了薄板的声辐射灵敏度问题。首先运用声辐射模态理论将结构的声辐射功率表示为结构表面速度分布的一个正定厄米特二次型, 然后利用结构的有限元方程求出结构的速度响应, 通过将结构的声辐射功率对设计

收稿日期: 2007-05-20; 修回日期: 2007-09-02

作者简介: 赵志高(1976-), 男, 湖北黄陂人, 博士后, 研究方向为结构振动与噪声控制。

通讯作者: 赵志高, E-mail: zzgnr@126.com

参数求偏导,最终将结构的声辐射灵敏度问题表示为结构阻抗矩阵的灵敏度问题以及结构刚度矩阵、阻尼矩阵与质量矩阵的灵敏度问题。关于结构的动力修改的灵敏度问题,文献[9]作了详细的介绍,文中最后以四边简支板为数值算例,研究了其声辐射的灵敏度。

## 2 结构的声辐射理论

对于任意结构,其振动声辐射的声功率为:

$$W = \int_S I_s dS \quad (1)$$

单频振动的情况下有:

$$I_s = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[P^*(R) V_n(R)] \quad (2)$$

式中, $R$ 为封闭结构 $S$ 上的点, $I_s$ 为 $R$ 点的声强, $P(R)$ 为 $R$ 点的声压, $V_n(R)$ 为 $R$ 点的法向振速,\*代表共轭; $P=(p_1, p_2 \cdots p_N)^T$ , $V=(v_1, v_2, \cdots v_N)^T$ 。

对于位于无限挡板上的平板,可以用 Rayleigh 积分直接得出薄板表面任意点声压与振速之间的关系<sup>[8]</sup>:

$$P(R) = \frac{i\omega\rho}{2\pi} \int_S V(Q) \frac{e^{-ikr}}{r} dS(Q), r = |x_R^v - x_Q^v| \quad (3)$$

式中, $x_R^v$ 表示 $R$ 点的坐标。 $k=\omega/c$ 称为波数, $\omega$ 为角频率, $c$ 为波速, $i=\sqrt{-1}$ ; $\rho$ 为空气介质的密度。由上式得:

$$\begin{aligned} I_s &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \frac{i\omega\rho}{2\pi} \int_S V(Q) \frac{e^{-ikr}}{r} V_n^*(R) dS(Q) \right] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \frac{i\omega\rho}{2\pi} \int_S V(Q) \frac{i\cos(kr) + \sin(kr)}{r} V_n^*(R) dS(Q) \right] \\ &= \frac{\omega\rho}{8\pi} \left[ \int_S V(Q) \frac{i\cos(kr) + \sin(kr)}{r} V_n^*(R) dS(Q) \right] \\ &\quad + \frac{\omega\rho}{8\pi} \left[ \int_S V(Q) \frac{\sin(kr) - i\cos(kr)}{r} V_n^*(R) dS(Q) \right] \\ &= \frac{\omega\rho}{4\pi} \left[ \int_S V_n^*(R) \frac{i\sin(kr)}{r} V(Q) dS(Q) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

代入得:

$$W = \frac{\omega\rho}{4\pi} \int_S \int_S V_n^*(R) \frac{i\sin(kr)}{r} V(Q) dS(Q) dS(R) \quad (5)$$

若将结构离散为 $N_e$ 个单元,采用四节点等参单元,式中 $N_i$ 为等参单元的插值形函数, $p_i$ 与 $v_i$ 分别为节点的声压值与法向振速值。

$$p = N P_a \quad (6)$$

$$v = N V_a \quad (7)$$

$P_a$ 与 $V_a$ 分别为单元四个节点的声压值与速度值,

单元 $S_i$ 的 $j$ 号节点处的速度幅值 $v_i$ 是一个纯数,故其转置与其自身相等,由式(7)得:

$$v_j = v_j^T = (N V_a)^T = V_a^T N^T \quad (8)$$

将式(8)代入式(5)得:

$$\begin{aligned} W &= \frac{\omega\rho}{4\pi} \int_S \int_S V_a^H N^H \frac{\sin(kr)}{r} N V_a dS(R) dS(Q) \\ &= \frac{\omega\rho}{4\pi} \sum_{i=1}^{N_e} \sum_{j=1}^{N_e} \int_{S_i} \int_{S_j} V_a^H N^H \frac{\sin(kr)}{r} N V_a dS_j dS_i \\ &= \frac{\omega\rho}{4\pi} \sum_{i=1}^{N_e} \sum_{j=1}^{N_e} \int_{S_i} \int_{S_j} V_a^H N^H \frac{\sin(kr)}{r} N V_a dS_j dS_i \\ &= \frac{\omega\rho}{4\pi} \sum_{i=1}^{N_e} \sum_{j=1}^{N_e} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 V_a^H N^H \left( \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\sin(kr)}{r} N V_a J_d \xi d\eta \right) J_d \xi d\eta \end{aligned} \quad (9)$$

将式(9)离散,并通过单元的拓扑结构组装起来,则上式可以表示为

$$W = V^H Z V \quad (10)$$

式中

$$Z = \frac{\omega\rho}{4\pi} \sum_{i=1}^{N_e} \sum_{j=1}^{N_e} \int_{S_i} \int_{S_j} N^H \frac{\sin(kr)}{r} N dS(R) dS(Q) \quad (11)$$

$Z$ 称为阻抗矩阵,由式(11)知 $Z$ 为厄米特型矩阵,由 $W = V^H Z V$ 知,对于任意速度分布,其辐射声功率为正,由此知厄米特型矩阵 $Z$ 正定。因此,其对应的特征值全为正。由于在求解的过程中,所有矩阵的求解仅与结构的几何形状与结构的激励频率有关,因此,阻抗矩阵 $Z$ 仅与结构的几何形状与激励的频率有关,与结构的材料特性、边界条件及激励源的位置无关,所以在对结构的材料特性以及结构的边界条件进行灵敏度分析时,阻抗矩阵的灵敏度为零。

## 3 结构振动的有限元分析

对于薄板的振动,其控制微分方程为:

$$\nabla^4 X + \frac{\rho h}{D} \ddot{X} = \frac{F}{D} \quad (12)$$

式中: $D=Eh^3/12(1-\nu)$ 为薄板的抗弯刚度, $h$ 为薄板的厚度, $\rho$ 为薄板的密度, $X$ 为薄板振动时的纵向位移。其在谐波激励下的有限元方程为:

$$M \ddot{X} + C \dot{X} + K X = F_a e^{i\omega t} \quad (13)$$

设结构在谐波激励下的位移响应为:

$$X = X_a e^{i\omega t} \quad (14)$$

于是结构的速度为:

$$V = \frac{\partial X}{\partial t} = i\omega X_a e^{i\omega t} \quad (15)$$

将式(15)代入式(13)得:

$$(K+i\omega C-\omega^2 M)X_a = F_a \quad (16)$$

可以求出谐波激励下薄板的位移:

$$X_a = (K+i\omega C-\omega^2 M)F_a \quad (17)$$

## 4 结构声辐射的灵敏度分析

设结构的设计变量为  $a$ , 将式(10)所得结构声辐射的声功率对设计变量求偏导, 得:

$$\frac{\partial W}{\partial a} = \frac{\partial V^H}{\partial a} ZV + V^H \frac{\partial Z}{\partial a} V + V^H Z \frac{\partial V}{\partial a} \quad (18)$$

由于  $\frac{\partial V^H}{\partial a} = (\frac{\partial V}{\partial a})^H$ , 因此只需计算  $\frac{\partial Z}{\partial a}$  与  $\frac{\partial V}{\partial a}$ 。

由式(17)知:

$$\frac{\partial V}{\partial a} = i\omega \frac{\partial X_a}{\partial a} e^{i\omega t} \quad (19)$$

如果设计变量与结构声辐射的阻抗矩阵和结构所受到的外力无关, 将式(17)两边对设计变量  $a$  求偏导:

$$(\frac{\partial K}{\partial a} + i\omega \frac{\partial C}{\partial a} - \omega^2 \frac{\partial M}{\partial a})X_a + (K+i\omega C-\omega^2 M)\frac{\partial X_a}{\partial a} = 0 \quad (20)$$

由式(20)得:

$$\frac{\partial X_a}{\partial a} = (K+i\omega C-\omega^2 M)^{-1}(\frac{\partial K}{\partial a} + i\omega \frac{\partial C}{\partial a} - \omega^2 \frac{\partial M}{\partial a})X_a \quad (21)$$

由式(21)知无阻尼结构声辐射的灵敏度问题转化为阻抗矩阵的灵敏度问题与结构刚度矩阵以及质量矩阵的灵敏度问题, 根据阻抗矩阵  $Z$  是厄米特型矩阵, 则式(18)可以化为:

$$\frac{\partial W}{\partial a} = V^H \frac{\partial Z}{\partial a} V + 2V^H Z \frac{\partial V}{\partial a} \quad (22)$$

由式(19)、式(21)和式(22)可得结构的声辐射灵敏度为:

$$\frac{\partial W}{\partial a} = V^H \frac{\partial Z}{\partial a} V + 2V^H Z (K+i\omega C-\omega^2 M)^{-1}(\frac{\partial K}{\partial a} + i\omega \frac{\partial C}{\partial a} - \omega^2 \frac{\partial M}{\partial a})X_a \quad (23)$$

由式(11)知结构阻抗矩阵的灵敏度与结构的几何现状与激励力的频率有关。如果设计变量不是薄板的几何形状或激励的频率, 根据阻抗矩阵的性质, 有:

$$\frac{\partial Z}{\partial a} = 0 \quad (24)$$

此时结构声辐射对结构设计变量的灵敏度为:

$$\frac{\partial W}{\partial a} = 2V^H Z (K+i\omega C-\omega^2 M)^{-1} (\frac{\partial K}{\partial a} + i\omega \frac{\partial C}{\partial a} - \omega^2 \frac{\partial M}{\partial a})X_a \quad (25)$$

## 5 数值仿真

### 5.1 薄板厚度的声辐射灵敏度分析

为了从理论上研究分析薄板结构的厚度及其振动频率对其声辐射的影响, 本文以四边简支的薄板 I 为例, 对其进行研究, 其结构如图 1 所示。

设薄板 I 的长为  $a=0.5m$ , 宽  $b=0.5m$ , 四边简支。在点  $(0.4, 0.2)$  处受到正弦激励力为  $F=10\sin\omega t$  (N), 激励频率为 100Hz, 钢板的泊松比  $\mu=0.3$ , 厚度  $h$  可变, 其变化规律为:  $h=(0.5+0.5n)mm$ , ( $n=0, 1, 2, \dots, 99$ )。钢密度  $\rho_0=7800kg/m^3$ , 杨氏模量  $E=2.1\times 10^{11}Pa$ 。声速  $c_0=343m/s$ , 空气密度  $\rho=1.225kg/m^3$ 。

薄板 I 受集中载荷时不同厚度下其声辐射功率如图 2 所示。表 1 列出了模态频率在 100Hz 附近时薄板的厚度, 可以清楚地看到当薄板的共振频率在 100Hz 附近时, 结构辐射的声功率较大, 也说明在实际中不是薄板的厚度越大就越好, 薄板的厚度应该根据结构的激励源来确定。

声辐射的灵敏度分析可以指明修改哪些参数可以显著地改变结构的声辐射性能, 为结构的动力修改提供有效的修改方案, 数值算例中薄板厚度的声辐射功率及其声辐射灵敏度如图 3 所示。

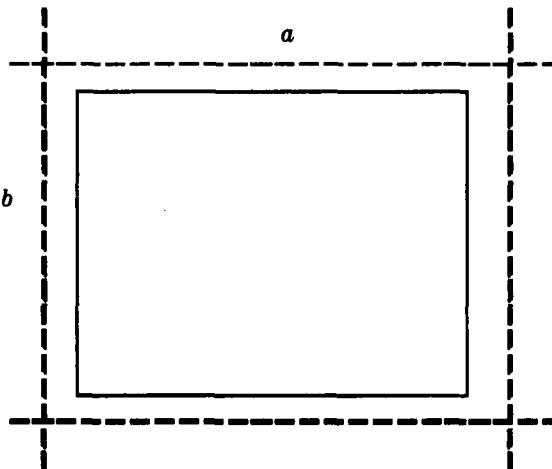


图 1 四边简支的薄板

Fig.1 A simple supported plate

表 1 不同厚度下薄板 100Hz 左右模态频率  
Table 1 The modal Frequency of different plate thickness near 100Hz

| 厚度/mm | 0.5  | 1    | 2    | 4    | 8    | 10.5  |
|-------|------|------|------|------|------|-------|
| 频率/Hz | 99.8 | 99.8 | 99.8 | 99.8 | 99.8 | 100.8 |

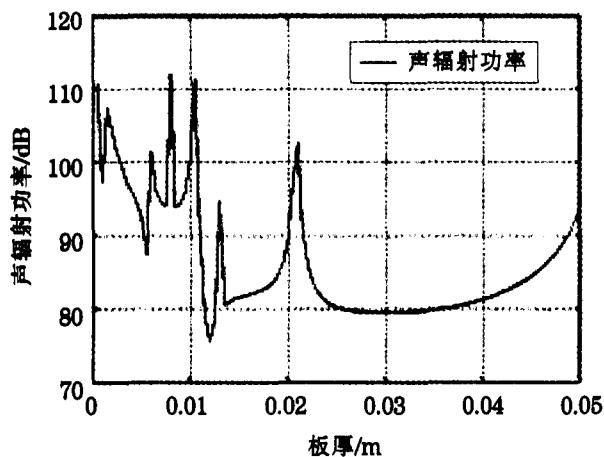


图2 不同厚度下薄板的声辐射功率

Fig.2 Sound power radiated by the plate of different thickness

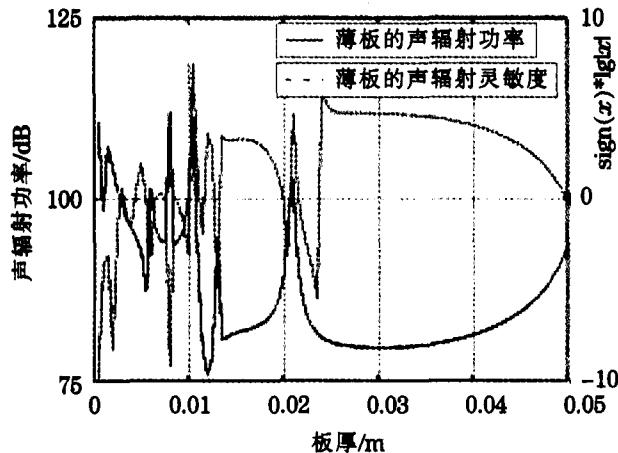


图3 薄板的声辐射功率及其厚度的声辐射灵敏度

Fig.3 Sound power and sound sensitivity radiated by the plate of different thickness

## 5.2 薄板激励频率的声辐射灵敏度分析

设薄板 I 在点(0.25, 0.15)处受到正弦激励力为  $F=100\sin\omega t(N)$ , 激励频率  $f=20+10n(Hz)$ ,  $n=0, 1, 2, \dots, 99$ 。在不同的激励频率下, 其辐射的声功率级与激励频率之间的关系如图 4 所示, 其辐射的声功率在激励频率为 210Hz 时达到最大。图 5 的结果显示此时的声辐射功率的灵敏度也达到了最大值。

## 6 结 论

本文利用有限元与 Rayleigh 积分对薄板结构的声辐射特性进行了研究, 并以四边简支的矩形薄板为例, 详细研究了激励频率与薄板厚度的变化对其声辐射的影响。数值计算结果表明: 激励频率与薄板的厚度变化对薄板的声辐射都有较大影响, 在薄板的固有频率附近, 结构所辐射的声功率急剧增加; 在一定的薄板厚度里, 薄板的声辐射并不随着其

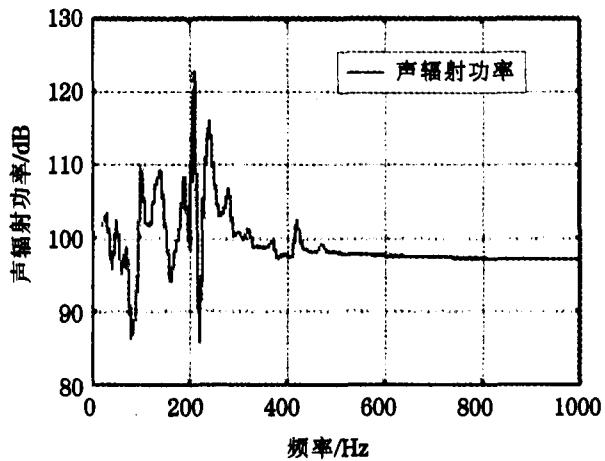


图4 不同频率下薄板的声辐射功率

Fig.4 Sound power radiated by the plate at different frequency

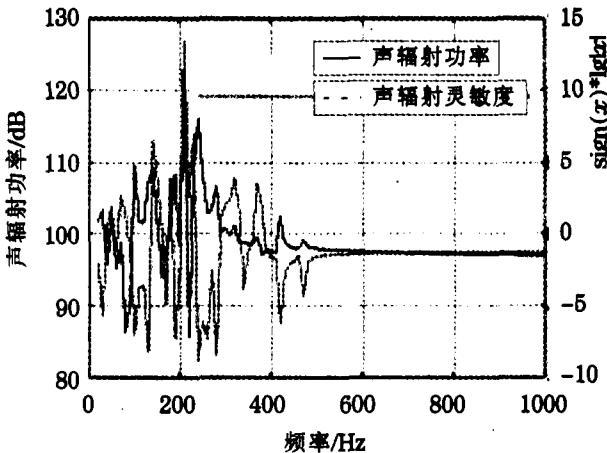


图5 薄板的声辐射功率及其频率声辐射灵敏度

Fig.5 Sound power and sound sensitivity of plate of different frequency

厚度的增加而减小, 这主要是由于厚度引起结构的固有频率变化, 从而引起声辐射功率的变化。

在用 Rayleigh 积分计算结构辐射的声场时, 采用四节点等参单元, 积分采用的是高斯求积公式, 误差较小, 因此, 该方法的误差主要是来源于计算声场时的 Rayleigh 积分近似。

将该方法和有限元或其它的数值计算方法相结合, 计算出结构表面的速度分布, 可以实现对任意边界条件薄板的声辐射特性进行预测, 从而为结构的低噪声设计提供理论指导, 在工程实际中有较大的意义。

本文由中国博士后科学基金(第 41 批), 华中科技大学博士后科学基金资助。

## 参 考 文 献

- [1] Elliott SJ. Radiation modes and the active control of sound power [J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1993, 94(4): 2194-2204.
- [2] Koorosh N, Chen W, Koopmann GH. Active control sou-

- nd power using acoustic basis functions as surface velocity filters [J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1993, 93(5): 2740-2752.
- [3] Cunefare KA, Currey MN. On the exterior acoustic radiation modes of structure [J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1994, 96(4): 2302-2312.
- [4] Currey MN, Cunefare KA. The radiation modes of baffled finite plates [J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1995, 98(3): 1570-1580.
- [5] Snyder SD, Tanaka N. Calculating total acoustic power output using modal radiation efficiencies [J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1995, 97(3): 1702-1709.
- [6] 王志, 姜哲. 对平板的速度分布及对应辐射效率的探讨[J]. 江苏理工大学学报(自然科学版), 1999, 20(2): 13-16.  
WANG Zhi, JIANG Zhe. The study of the velocity profiles and the corresponding radiation efficiencies on a plate [J]. Journal of Jiangsu University of Science and Technology, 1999, 20(2): 13-16.
- [7] 黎胜, 赵德有. 用有限元/边界元方法进行结构声辐射的模态分析[J]. 声学学报, 2001, 26(2): 174-179.  
LI Sheng; ZHAO Deyou. Modal analysis of structural acoustic radiation using FEM/BEM. [J] Acta Acustica, 2001, 26(2): 174-179.
- [8] Currey MN, Cunefare KA, Johnson ME, Elliott SJ. The radiation efficiency grouping of free-space acoustic radiation modes [J]. Journal of the Acoustical Society of America, 2001, 109(1): 203-215.
- [9] 顾松年. 结构动力修改的发展与现状[J]. 机械强度, 1991, 13(1): 1-9.  
GU Songnian. The development and present situation of structural dynamic modification [J]. Journal of Mechanical Strength, 1991, 13(1): 1-9.