

# 时域有限差分法及其在室内声场模拟中的应用

彭健新

(华南理工大学物理科学与技术学院, 广州 510640)

**摘要:** 时域有限差分法将声波基本方程表示为一个时间和空间的迭代方程组, 实现对室内声场中低频段的模拟计算。在介绍时域有限差分法基本原理的基础上, 着重探讨采用时域有限差分法模拟室内声场时边界条件的处理方法及该方法在室内声场模拟中的应用。分析了该方法存在的一些问题及其应用前景。

**关键词:** 时域有限差分法; 边界条件; 室内声场模拟

中图分类号: TU112.4

文献标识码: A

文章编号: 1000-3630(2009)-01-0053-05

## Finite difference time domain method and its application in room acoustical simulation

PENG Jian-xin

(School of Physics, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

**Abstract:** Sound field in rooms at low frequency can be simulated by using finite difference time domain method, which expresses the acoustical wave equation in a serial spatial and time iterative equation groups. In the paper, the basic principle of finite difference time domain method is introduced. It is emphatically discussed that the processing method of boundary condition and the application of using finite difference time domain method to room acoustical field simulation. The existing problems and prospective of this method are also analyzed.

**Key words:** finite difference time domain method; boundary condition; room acoustics simulation

## 1 引言

随着计算机技术和信号处理技术的发展, 室内声场模拟技术逐渐成熟, 采用基于几何声学虚声源法、声线跟踪法及二者结合的混合法只适应于对室内声场中高频部分的模拟。对于室内声场的低频部分以及小室内空间, 声波的波动效应如声波的衍射和干涉现象、房间模态或共振效应更显著, 需要采用波动声学方法来模拟。常用的基于波动声学的室内声场模拟方法有: 有限元法(FEM)、边界元法(BEM)、时域有限差分法、数字波导网格法(DWM)等。有限元法是将一个连续的求解域任意分成适当形状的许多微小单元, 并于各小单元分片构造插值函数, 然后根据极值原理(变分或加权余量法), 将问题的控制方程转化为所有单元上的有限元方程, 把总体的极值作为各单元极值之和, 即将局部单元总体合成, 形成嵌入了指定边界条件的代数方程组, 求解该方程组就得到各节点上待求的函数值<sup>[1]</sup>。边界

元法是应用格林函数公式, 通过选择适当的权函数把空间求解域内的偏微分方程转换成为其边界上的积分方程。它把求解区中任一点的求解变量(如声压)与边界条件联系起来。通过离散化处理, 由积分方程导出边界节点上未知值的代数方程。解出边界上的未知值后就可以利用边界积分方程来获得内部任一点的被求函数值<sup>[2]</sup>。时域有限差分法是将所求解的声波振动方程的导数用网格节点上的函数值的差商代替进行离散, 从而建立以网格节点上的值为未知数的代数方程组<sup>[3,4]</sup>。该方法是一种直接将微分问题变为代数问题的近似数值解法, 数学概念直观, 表达简单。数字波导网格法以时间和空间离散为基础, 离散的点称为节点, 节点之间通过单位延迟长度的双向数字波导相连, 形成数字波导网格<sup>[3]</sup>。根据节点处的声压等于该节点输入声压和输出声压之和、在连接点处总的输入和总的输出体积速度之和为 0 以及连接点处阻抗连续等条件求出散射连接点处的声压。这些基于波动声学的室内声场模拟方法各有优缺点。有限元方法适合处理复杂区域, 精度可选。缺点在于内存和计算量巨大。边界元相对于有限元来说, 在相同离散精度的条件下, 边界元解的精度要高于有限元。虽然边界元法单元数、未知量个数少、方程组阶次低, 但方程组

收稿日期: 2008-02-10; 修回日期: 2008-05-25

基金项目: 广东省自然科学基金(8151064101000075)

作者简介: 彭健新(1968-), 男, 湖南人, 博士, 研究方向为室内声学、计算声学研究。

通讯作者: 彭健新, E-mail: phjxpeng@163.com

的系数矩阵不对称并为满阵,有时是近似的奇异阵,求解这类方程组的方法受到限制。时域有限差分法直观,理论成熟,精度可选,易于编程,易于并行,但存在色散误差以及不规则区域处理繁琐<sup>[3-6]</sup>。近年发展起来的网格生成可以使FDTD法适用于不规则区域<sup>[4]</sup>。数字波导网格法主要用于乐器的物理模拟<sup>[3]</sup>,近年也应用于室内声学模拟<sup>[7]</sup>,它的优点是理论简单、直观,易于编程计算,缺点与时域有限差分法相似,存在色散误差以及不规则区域处理繁琐。数字波导网格法是特定条件下的时域有限差分法<sup>[3]</sup>,即在此条件下,二者等价。对于室内声场模拟,数字波导网格法和时域有限差分法可将室内声场传播过程直观地再现出来,直接得到确定厅堂声学中声音质量的房间脉冲响应。本文首先介绍了时域有限差分法的基本原理及其对室内边界条件的处理方法,然后介绍其在室内声场模拟中的一些具体应用,并讨论了该方法存在的一些问题及其应用前景。

## 2 时域有限差分法原理

时域有限差分法的基本思想是用中心差商代替场量对时间和空间的一阶偏微商,通过在时域的递推模拟波的传播过程,从而得出场分布。它最早由K.S.Yee于1966年提出,在此之后的20年内,其研究进展缓慢,只是在电磁散射、电磁兼容领域有一些初步的应用。自80年代末,时域有限差分法成为电磁场数值计算的重要方法之一。在声学数值计算中,时域有限差分法已应用于水声学、噪声控制及室内声学等方面的数值模拟<sup>[4-6]</sup>。

在室内空间中,如果忽略空气的粘滞性,并假定声波传播过程中,气体的振动速度和声压很小,即气体的振动速度远小于声速,声压远小于静态压强,则气体运动的牛顿力学方程为:

$$\rho_0 \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial t} \right) = - \left( \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k} \right) \quad (1)$$

连续性方程为:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c^2 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

采用均匀交错网格单元(图1)对计算空间进行划分<sup>[4]</sup>,得到式(1)、(2)的离散差分方程<sup>[6]</sup>:

$$\begin{aligned} v_x^{[l+0.5]}(i+0.5, j, k) &= v_x^{[l-0.5]}(i+0.5, j, k) - \\ &\frac{\delta t}{\rho_0 \delta x} \times [p^{[l]}(i+1, j, k) - p^{[l]}(i, j, k)] \\ v_y^{[l+0.5]}(i, j+0.5, k) &= v_y^{[l-0.5]}(i, j+0.5, k) - \end{aligned} \quad (3a)$$

$$\frac{\delta t}{\rho_0 \delta y} \times [p^{[l]}(i, j+1, k) - p^{[l]}(i, j, k)] \quad (3b)$$

$$\begin{aligned} v_z^{[l+0.5]}(i, j, k+0.5) &= v_z^{[l-0.5]}(i, j, k+0.5) - \\ &\frac{\delta t}{\rho_0 \delta z} \times [p^{[l]}(i, j, k+1) - p^{[l]}(i, j, k)] \end{aligned} \quad (3c)$$

$$\begin{aligned} p^{[l+1]}(i, j, k+1) &= p^{[l]}(i, j, k) - \\ &\frac{\rho_0 c^2 \delta t}{\delta x} [v_x^{[l+0.5]}(i+0.5, j, k) - v_x^{[l+0.5]}(i-0.5, j, k)] - \\ &\frac{\rho_0 c^2 \delta t}{\delta y} [v_y^{[l+0.5]}(i, j+0.5, k) - v_y^{[l+0.5]}(i, j-0.5, k)] - \\ &\frac{\rho_0 c^2 \delta t}{\delta z} [v_z^{[l+0.5]}(i, j, k+0.5) - v_z^{[l+0.5]}(i, j, k-0.5)] \end{aligned} \quad (4)$$

上面式子中 $\rho_0$ 和 $c$ 分别代表媒质的密度和声速, $\delta x, \delta y, \delta z, \delta t$ 分别为空间步长和时间步长,使用上述差分公式时,应该满足以下稳定条件<sup>[6]</sup>:

$$c \delta t \leq \left( \frac{1}{\delta x^2} + \frac{1}{\delta y^2} + \frac{1}{\delta z^2} \right)^{-1/2} \quad (5)$$

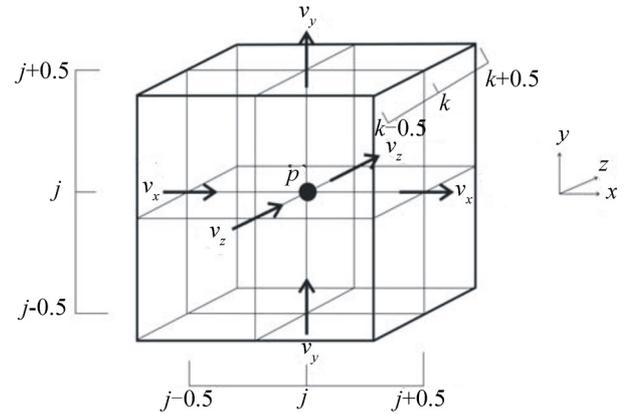


图1 交错网格单元  
Fig.1 Staggered mesh

在FDTD的网格中,数值波模的传播速度将随着频率的改变而改变,即在计算网格中引起数值色散,这种改变随着数值波模在网格中的传播方向以及离散化情况不同而改变<sup>[6]</sup>。这种色散将导致非物理因素引起的脉冲波形畸变、人为的各向异性及虚假折射现象。理论上讲,当 $\delta x, \delta y, \delta z, \delta t$ 均趋于零时,数值色散可以减小任意的程度。但是,当时间及空间步长足够小时,又会大大增加所需的计算机存储空间的CPU时间并使累积误差增加。为了减少计算中产生的色散误差,可采用插值、非标准FDTD、提高计算阶次、减小时间、空间步长等方法<sup>[7-11]</sup>。在FDTD中应当根据计算的声波的频率(或波长)选取适当的时间及空间步长。

考虑到数值计算的稳定条件及数值色散两方面,一般计算中取 $\delta x = \delta y = \delta z = \delta h$ ,且 $\delta h \leq \lambda/10$ , $\lambda$ 为声波的波长。

### 3 边界条件处理

应用时域有限差分法进行室内声学模拟, 其边界条件处理不同于电磁场数值计算。在电磁场数值计算中, 波动过程可能的空间很大, 甚至是在无限大的空间内传播, 但由于计算机内存有限, 因此, 计算域必须在空间某处被截断, 在截断处设置吸收边界条件。而在室内声学低频问题处理中, 室内空间一般即为模拟区间, 这时计算域只需要计算到建筑的边界, 因此需要合理设置边界条件。在一些要求不高的场合, 常将边界设置为理想的硬边界和软边界。一般的做法是根据“局部作用”表面的法向声阻抗  $Z_n$ , 由式(6)计算边界质点的法向声速  $v_D$ <sup>[12,13]</sup>。

$$v_D = \frac{p}{Z_n} \quad (6)$$

式中  $p$  为声压。为了简化, 通常在边界上将法向声阻抗取实部, 这样可以由法向吸声系数  $\alpha_n$  来计算边界上的法向声阻抗  $Z_n$ <sup>[12,13]</sup>。

J. Lovetri、D. Mardare、G. Soulodre 在应用时域有限差分法模拟坐席吸声低谷效应时, 采用 Mur 一阶和二阶吸收边界条件对边界进行处理<sup>[14]</sup>。

上述对边界条件的处理只适用于单一频率, 为了考虑较宽的频率范围, 提高 FDTD 计算的准确性, D. Botteldooren 提出一种三参数阻抗模型<sup>[6]</sup>,

$$Z(\omega) = Z_{-1} / j\omega + Z_0 + j\omega Z_1 \quad (7)$$

式中,  $\omega$  为声波的角频率,  $Z_{-1}$ 、 $Z_0$ 、 $Z_1$  为与边界材料有关的三个参数, 由测量数据拟合得到。将式(7)变换到时域即可得到边界条件:

$$p(t) = Z_{-1} \int_{-\infty}^t v_n(\tau) d\tau + Z_0 v_n(t) + Z_1 \frac{dv_n(t)}{dt} \quad (8)$$

$p(t)$  为声压,  $v_n(t)$  为与边界面垂直的质点振动速度分量。其差分形式为<sup>[6]</sup>:

$$v_z^{j+0.5}(i, j, k_0 + 0.5) = \alpha v_z^{j-0.5}(i, j, k_0 + 0.5) - \beta \frac{2\delta t}{\rho_0 \delta z} \cdot \left[ p^j(i, j, k_0) - Z_{-1} \delta t \sum_{m=-\infty}^j v_z^{m-0.5}(i, j, k_0 + 0.5) \right] \quad (9)$$

其中:

$$\alpha = \frac{1 - Z_0 \delta t / (\rho_0 \delta z) + 2Z_1 / (\rho_0 \delta z)}{1 + Z_0 \delta t / (\rho_0 \delta z) + 2Z_1 / (\rho_0 \delta z)} \quad (10)$$

$$\beta = \frac{1}{1 + Z_0 \delta t / (\rho_0 \delta z) + 2Z_1 / (\rho_0 \delta z)} \quad (11)$$

在边界利用式(9), 在计算区域内利用式(3)和式(4), 即可模拟计算给定区域的声压  $p$  和振动速度  $v_x, v_y, v_z$ 。

最近, 一些研究者采用 Pade 近似<sup>[15]</sup>和 Z 变换

方法<sup>[16]</sup>, 通过拟合频域测量数据建立“局部作用”表面边界阻抗模型; 而 Wilson 等从物理参数入手, 建立多孔材料的声阻抗模型<sup>[17]</sup>, 这些模型可以处理非“局部作用”表面一次反射, 如能将这些模型应用于室内声场(多次反射)时域模拟方法中, 其模拟结果的准确度将有很大改善。

### 4 时域有限差分法在室内声学计算中的应用

时域有限差分法将声场的基本方程表示为时间和空间的迭代方程组, 实现对室内声场中低频段的模拟计算, 其算法简单。随着计算机计算速度的提高, 计算的频率范围也不断拓宽, 应用更加广泛。1995 年 Botteldooren 首次将时域有限差分方法应用于低频室内声场的模拟<sup>[6]</sup>, 随后 Lovetri 等采用该方法研究坐席低谷效应<sup>[14]</sup>。近年来许多学者采用该方法研究扩散体对室内声场的扩散效果、混响室的最佳声场模拟以及室内声场中声传播、反射、扩散、散射以及衍射等现象的可视化、多通路声场模拟可听化等<sup>[12,15-26]</sup>。

(1) 室内声场中低频段房间脉冲响应的模拟计算。Botteldooren 应用时域有限差分法计算一厅堂的中低频段的房间脉冲响应<sup>[6]</sup>, 对大的中心区域采用 Cartesian 网格的 FDTD 公式计算, 而在边界个别区域采用 Voronoi 单元的 FDTD 公式计算, 同时对边界条件、色散误差和稳定性进行了探讨, 结果表明, 时域有限差分法在低频及中频段是室内声场模拟的有力工具。Yokota, Sakamoto 和 Tachibana 采用时域有限差分法计算比较了矩形、扇形、椭圆形等房间有无扩散处理时的房间脉冲响应<sup>[12]</sup>, 结果表明, 经扩散处理后的房间脉冲响应变得更密而平滑, 主观听音结果更自然。

(2) 室内声场中一些比较特殊的现象的模拟计算分析, 如坐席低谷效应, 扩散体的声扩散效果等<sup>[14,18-20]</sup>。Lovetri、Mardare、Soulodre 采用时域有限差分法对座椅吸声低谷现象进行模拟<sup>[14]</sup>, 他们采用 5cm 网格对一长宽高分别为 24.5m、3.5m 和 4.25m 的房间进行划分, 得到 2915500 个网格单元。模拟结果表明, 在同一水平面上, 随着场点与声源间座椅排数的增加, 座椅吸声的低谷效应更加明显; 在同一座椅位置, 随着接收点与地面距离的增加, 座椅吸声低谷效应逐渐减弱。而且, 他们还采用时域有限差分法模拟了声源高度及掠射角度对座椅吸声低谷效应的影响。另有研究者采用时域有限差分

法对不同的混响室形状、分布不同的扩散体对混响室声场分布的影响进行分析比较,得到了一些有意义的结果<sup>[18-20]</sup>。

(3) 室内声场中声传播、反射、扩散、散射以及衍射等现象的可视化研究。由于时域有限差分法是在时域直接进行计算,使各种声学现象,如声传播、反射、扩散、散射以及衍射等的可视化成为可能。日本的研究者在这方面做了很多工作,分析了不同房间形状、有无扩散处理、在房间上空架设浮云板等声场分布的变化<sup>[12]</sup>;同时他们还探讨了各种类型的声屏障对声波传播、反射及衍射等的影响<sup>[21]</sup>。

(4) 多通路声场模拟以及对扬声器辐射声场的数值计算<sup>[22-24]</sup>。Tokita 等采用时域有限差分法探讨了一种二维多通路声重放系统,他们采用时域有限差分法计算接受点位置前后左右四个方向的房间脉冲响应,然后在消声室以听音者为圆心、半径为 2m 的圆周上布置前后左右四个扬声器,重放先前计算的房间脉冲响应,以实现室内声场模拟的可听化,为心理声学实验提供了有力的工具<sup>[23,24]</sup>。

从上面可以看到,时域有限差分法在中低频室内声学问题的分析过程中,为室内声场数值计算提供了一个有用的工具和方法。它可以成功地模拟室内声学的各个方面,并可很方便地实现声场可视化。

## 5 存在问题与展望

在 FDTD 法中,时间增量  $\delta t$  和空间增量  $\delta x$ 、 $\delta y$ 、 $\delta z$  不是相互独立的,它们的取值必须满足一定的关系,否则,在求解差分方程时,随着时间步的增加,计算结果也将无限地增加。采用 FDTD 法计算时,需要满足式(5)给出的数值稳定条件。而且,在时域有限差分法网格中,数值波模的传播速度将随着频率的改变而改变,即在计算网格中引起数值色散,这种改变随着数值波模在网格中的传播方向以及离散化情况不同而改变<sup>[4,6]</sup>。这种色散将导致非物理因素引起的脉冲波形畸变、人为的各向异性及虚假折射现象。当时间及空间步长足够小时,可以减小数值色散的程度,但又会增加所需的计算机存储空间、CPU 时间和累积误差。因此,应当根据所计算的频率(或波长)选取适当的时间及空间步长。

由于时域模拟方法在边界条件处理上较难使其适应性受到严格限制,以致在室内声学应用中发展缓慢,很难在实际中得到重要的使用。通常将边界阻抗值假设为与频率无关的常量,或者假设边界为硬表面或依赖于频率的一阶阻抗<sup>[4,6,12-14]</sup>。这些假

设只能在一个很窄的频率范围内有效,使 FDTD 方法不能应用于实际的、宽频带脉冲响应计算场合,这使时域模拟方法的优势大打折扣。

与一般的频域模拟方法相比,时域有限差分法模拟在原理上是一种较好的室内声学模拟方法。我们知道:具有时域特征的房间脉冲响应是确定厅堂声学中声音质量的重要参量,也是室内声学模拟可听化等后处理方法必不可少的。时域模拟方法在室内声学设计方面具有明显的优势,它使声场随时间扩散的过程变得可视化并以直观的形式展现房间界面、形状等对声学方面的影响<sup>[10,19]</sup>。由于它对声波波动方程采用迭代技术直接求解,FDTD 法在室内声学计算中将是一种很有前景的波动声学计算方法<sup>[27]</sup>。

## 参 考 文 献

- [1] Akin J. E. Finite element analysis with error estimators [M]. Burlington: Elsevier, 2005.
- [2] Wu T. W. Boundary element acoustics fundamentals and computer codes [M]. Billerica: WIT Press, 2001.
- [3] Marc Aird. Musical instrument modelling using digital waveguid [D]. Doctor dissertation, University Of Bath, 2002.
- [4] Renterghem T. Van. The finite-difference time-domain method for simulation of sound propagation in a moving medium [D]. Universiteit Gent Doctoral dissertation, 2003.
- [5] 王朔中. 声学中用于时域有限差分法的一种高效吸收边界[J]. 声学学报,1997, 22(1): 11-21.  
WANG Suozhong. An efficient absorbing boundary for finite-difference time-domain field modeling in acoustics[J]. Acta Acustica, 1997, 22(1): 11-21.
- [6] Botteldooren D. Finite-difference time-domain simulation of low-frequency room acoustic problems[J]. J. Acoust. Soc. Am., 1995, 98(6): 3302-3308.
- [7] Savioja L, Valimaki V. Reduction of the dispersion error in the triangular digital waveguide mesh using frequency warping [J]. IEEE Signal Processing Letters, 1999, 6(3): 58-60.
- [8] Bezael Finkelstein, Raphael Kastner. Finite difference time domain dispersion reduction schemes [J]. Journal of Computational Physics, 2007, 221(1): 422-438.
- [9] Savioja L, Valimaki V. Reduction of the dispersion error in the interpolated digital waveguide mesh using frequency warping[A]. Proc. Int. Conf. Acoust. Speech, Signal Processing[C]. Phoenix, Arizona, 1999, 2: 973-976.
- [10] Taflove A, Hagness S. Computational electrodynamics: The finite difference time domain method [M]. 3rd ed. Artech House: Boston, 2005.
- [11] Hironori Kudo, Tatsuya Kashiwa, Tadao Ohtani. The nonstandard FDTD method for three-dimensional acoustic analysis and its numerical dispersion and stability condition [J]. Electronics and Communications in Japan, 2002, 85(9): 15-24.
- [12] Yokota T, Sakamoto S, Tachibana H. Visualization of sound propagation and scattering in rooms [J]. Acoust. Sci.&Tech, 2002, 23(1): 40-46.
- [13] Sakamoto S, Tachibana H. Calculation of impulse responses in 3-D sound field with absorptive boundary by the finite difference method[A]. Proc. Inter-Noise[C]. 1997, 97: 1597.

- [14] Lovetri Joe, Mardare Doru, Soulodre Gilbert. Modeling of the seat dip effect using the finite-difference time-domain method[J]. J. Acoust. Soc. Am., 1996, **100**(4): 2204-2212.
- [15] Lam C, Kooij B J, Adrianus T, et al. Impulsive sound reflection from an absorptive and dispersive planar boundary [J]. J. Acoust. Soc. Am., 2004, **116**(2): 677-685.
- [16] Albertson F, Boden H, Gilbert J. Comparison of different methods to couple nonlinear source descriptions in the time domain to linear system descriptions in the frequency domain-Application to a simple valveless one-cylinder cold engine[J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, **291**(5): 963-985.
- [17] Wilson D K, Ostashev V E, Collier S L, et al. Time-domain calculations of sound interactions with outdoor ground surfaces [J]. Applied Acoustics, 2007, **68**(2): 173-200.
- [18] Chung S Y, Rhee J G, Rhee H J. Field uniformity characteristics of an asymmetric structure reverberation chamber by FDTD method[A]. IEEE EMC international Symposium[C]. 2001. 429-434.
- [19] Chung SY, Rhee JG, Rhee HJ. Simulations on field uniformity in a triangular reverberation chamber [J]. International Journal of RF and Microwave Computer-Aided Engineering, 2002, **12**(2): 198-205.
- [20] SHEN B, REN W, GAO B, et al, The analysis of several diffusers in a reverberation chamber by FDTD method[A]. The 3rd International Conference on Microwave and Millimeter Wave Technology Proceedings[C]. 2002. 911-914.
- [21] Sakamoto S, Seimiya T, Tachibana H. Visualization of sound reflection and diffraction using finite difference time domain method [J]. Acoust. Sci. & Tech, 2002, **23**(1): 34-39.
- [22] Tokita Y, Ogino K, Oikawa Y, et al. The numerical analysis of sound fields produced by flat panel loudspeakers[A]. 18th ICA[C]. 2004, III: 2373 -2376.
- [23] Yokota T, Sakamoto S, Tachibana H. 4-channel sound field simulation system based on FDTD numerical analysis [EB/OL]. 2002' China-Japan Joint Conference on Acoustic, 2002. <http://cogni.cs.kumamoto-u.ac.jp/jca2002/titles/j016e.html>.
- [24] Shinichi S, Takatoshi Y, Tachibana Hideki. Sound field simulation method by combining finite difference time domain calculation and multi-channel reproduction technique [J]. Acoustical Science and Technology, 2004, **25**(1): 15-23.
- [25] Hoijer M, Andersson A, Lunden O, et al. Three-dimensional finite difference time domain analysis of reverberation chambers[A]. Proceedings of the 4th European Symposium on EMC [A]. Brugge, Belgium, 2000, 263-268.
- [26] Sakamoto S, Yokota T, Tachibana H. Numerical sound field analysis in halls using the finite difference time domain method[A]. Proc. International Symposium on Room Acoustics: Design and Science[C]. 2004.
- [27] Svensson U P, Kristiansen, U. R. Computational modeling and simulation of acoustic spaces[A]. Proc. of the 22nd Int. AES Conf[C]. 2002. 1-20.