

利用迭加法计算阶梯圆板辐射阻抗

贺西平¹, 宋旭霞¹, 张 频², 樊安仓¹

(1. 陕西师范大学应用声学研究所, 西安 710062; 2 西安建筑科技大学理学院, 西安 710055)

摘要: 辐射阻抗是描述声学振动系统的一个重要物理量。对阶梯圆板的辐射阻抗而言, 运用传统理论计算时, 由于辐射面不在同一几何面, 积分上下限很难选取而无法计算。从辐射声功率角度, 基于叠加原理, 提出了计算阶梯板辐射阻抗的算法——迭加法, 并计算了带有一个阶梯的阶梯板辐射阻抗。

关键词: 阶梯圆板; 辐射阻抗; 叠加原理

中图分类号: 0422.2

文献标识码: A

文章编号: 1000-3630(2009)-02-0188-03

DOI 编码: 10.3969/j.issn1000-3630.2009.02.021

Calculation of the radiation impedance of stepped circular plate with superposition method

HE Xi-ping¹, SONG Xu-xia¹, ZHANG Pin², FAN An-cang¹

(1. Applied Acoustics Institute, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China;
2. College of Science, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, China)

Abstract: Radiation impedance is a key physical quantity, used to describe vibration system. As far as the radiation impedance of stepped circular plate is concerned, the classical theory has difficulty in calculation, due to the fact that the radiation surface is not coplanar, and so the domain of integration is difficult to choose. From the point of view of radiation acoustic power, and based on superposition theory, a superposed method is proposed to calculate the radiation impedance and as an example the radiation impedance of circular plate with one step is obtained.

Key words: stepped circular plate; radiation impedance; superposition theory

1 引言

在空气中辐射超声波的主要困难是空气介质的低声阻抗和高介质吸收, 为有效地向空气中辐射超声能量, 需使超声辐射器与空气之间有良好的机械阻抗匹配。此外, 若要向较远距离传播超声波, 还需辐射的超声波具有良好的指向性。为解决上述问题, 西班牙学者 Gallego^[1]提出了弯曲振动阶梯圆板辐射器, 这种辐射器和一般圆盘辐射器相比, 具有更高的辐射功率和更好的指向性。辐射阻抗是描述声学振动系统的一个重要物理量, 表述媒质对振动面运动的反作用^[2-3], 可用来评价振动系统辐射声功率和电声效率的大小。为更好地评价阶梯圆板辐射器的辐射声功率, 有必要计算阶梯圆板的辐射阻抗。由于阶梯圆板辐射面不在同一平面, 直接运用目前已有的方法计算无法实现, 本文提出了一种阶

梯板辐射阻抗的计算方法——迭加法。

2 阶梯板辐射阻抗计算的一般方法

根据振动性质的不同, 计算辐射阻抗的方法可分为两种: (1) 对于集中参数系统, 例如活塞, 由于其辐射面振动速度均匀分布, 辐射阻抗可定义为整个活塞辐射面所克服声场作用力除以活塞振动速度; (2) 对于弯曲振动圆盘, 其振动速度是分布不均匀的。这类辐射面的辐射阻抗是从声源做功和声能角度来考虑, 把辐射声功率类比于电功率^[2-3]。若辐射器表面 (r, φ) 处, 速度复数振动幅值为 $U(r, \varphi)$, 声压振动幅值为 $p(r, \varphi)$, 则在 (r, φ) 点附近微分面元 ds 振动时提供给声场的复数声功率为:

$$dW = p(r, \varphi)U^*(r, \varphi)ds$$

整个辐射面的声功率为:

$$W = \iint_S p(r, \varphi)U^*(r, \varphi)ds$$

则辐射阻抗为:

$$Z = \frac{W}{u_R u_R^*} = \frac{1}{u_R u_R^*} \iint_S p(r, \varphi)U^*(r, \varphi)ds \quad (1)$$

阶梯板辐射面振动速度分布不均匀, 计算辐射

收稿日期: 2008-03-18; 修回日期: 2008-07-10

基金项目: 国家自然科学基金(10874102)、陕西省自然科学基金项目(2007A07)

作者简介: 贺西平(1965-), 男, 江西人, 教授, 博士生导师, 研究方向为超声工程、水声换能器及声信息处理。

通讯作者: 贺西平, E-mail: Hexiping@snnu.edu.cn

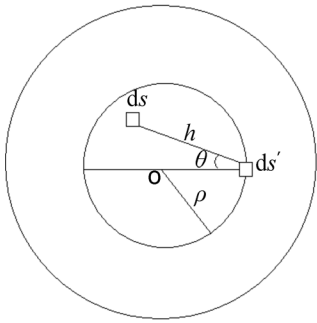


图 1 阶梯圆板积分示意图

Fig.1 Sketch map of integration for stepped circular plate

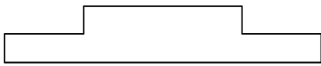


图 2 阶梯圆板截面图

Fig.2 Cross section of stepped circular plate

阻抗只能用上述第二种方法计算。如图 1 所示，图 2 为阶梯板的剖面图，把阶梯板分隔成无限多个小面元，每个小面元 ds 在面元 ds' 处产生的声压为：

$$dp = j \frac{k \rho_0 c_0}{2\pi h} u_a \exp(-jkh) ds$$

h 为 ds 与 ds' 之间的距离， k 为波数， ρ_0 、 c_0 分别为空气密度和声速， u_a 为振动速度幅值。整个阶梯板在面元 ds' 产生的声压为：

$$p = \int dp = \iint_s j \frac{k \rho_0 c_0}{2\pi h} u_a \exp(-jkh) ds$$

则面元 ds' 产生的辐射声功率为：

$$dw = pu_a ds' = \iint_s j \frac{k \rho_0 c_0}{2\pi h} u_a^2 \exp(-jkh) ds ds'$$

整个阶梯板所辐射的声功率为：

$$w = \int dw = \iint_s j \frac{k \rho_0 c_0}{2\pi h} u_a^2 \exp(-jkh) ds \iint_{s'} ds' \quad (2)$$

理论上对上式积分求出辐射声功率后，再利用公式： $Z = \frac{w}{u_R u_R^*}$ 即可求出辐射阻抗， u_R 为参考振速。

对式(2)积分，辐射面不在同一平面，积分上下限选取困难而无法计算。下面计算阶梯板的辐射阻抗。

3 迭加法计算阶梯圆板辐射阻抗

点源组合方法是研究辐射问题的基本方法。辐射面上的各点对空间声场都有贡献，将它们的贡献叠加起来即可得到总声压^[4,5]。将活塞面分为半径为 a_1 的小圆和内径为 a_1 、外半径为 a_2 的圆环两个部分。这两个部分的声压分别为 p_1 和 p_2 ，则整个活塞面的声压可表示为 $p = p_1 + p_2$ ，其中 p_1 和 p 分别为：

$$p_1 = j\omega \frac{\rho_0 u_a a_1^2}{2r} \left[\frac{2J_1(ka_1 \sin\theta)}{ka_1 \sin\theta} \right] \exp[j(\omega t - kr)]$$

$$p = j\omega \frac{\rho_0 u_a a_2^2}{2r} \left[\frac{2J_1(ka_2 \sin\theta)}{ka_2 \sin\theta} \right] \exp[j(\omega t - kr)]$$

$$\text{则 } p_2 = p - p_1 = j\omega \frac{\rho_0 u_a}{r} \left[\frac{a_2 J_1(ka_2 \sin\theta)}{k \sin\theta} - \frac{a_1 J_1(ka_1 \sin\theta)}{k \sin\theta} \right] \exp[j(\omega t - kr)]$$

将阶梯圆板分为中心凸起(中心下凹的情形也适用)和外围圆环两个部分，辐射声功率分别为 W_1 和 W_2 ，基于上述叠加原理，可知整个圆板的辐射声功率为 $W = W_1 + W_2$ 。用 Z 和 Z_1 、 Z_2 分别表示阶梯圆板、中心凸起、外围圆环的辐射阻抗，将公式 $W = W_1 + W_2$ 两边除以 $u_R u_R^*$ ，就得出 $Z = Z_1 + Z_2$ ，用 S_1 和 S_2 分别表示各部分面积，则圆盘的辐射阻抗为：

$$R = \frac{R_1 S_1 + R_2 S_2}{S}, \quad X = \frac{X_1 S_1 + X_2 S_2}{S}$$

上式中 R_1 、 X_1 为中心部分辐射阻抗。中心部分辐射面在同一几何平面，其阻抗可利用公式(1)来求解。圆环部分辐射阻抗可利用已求得的圆板辐射阻抗进行计算。

将圆板沿着节圆分成两部分，即中心小圆和外围圆环两部分，设其阻抗分别为 $Z_{小}$ 和 $Z_{环}$ ，面积分别为 $S_{小}$ 和 $S_{环}$ 。根据叠加原理，可知圆板的辐射阻抗为 $Z_{圆} = Z_{小} + Z_{环}$ 。只要求得 $Z_{小}$ 和 $Z_{圆}$ 就可以得到 $Z_{环}$ ，即 $Z_{环} = Z_{圆} - Z_{小}$ 。

节圆两侧振动相位相反使声场产生相消干涉，声功率降低^[6,7]。假设 $Z_{环}$ 为正，则 $Z_{小}$ 为负。阶梯板的高度恰好为半波长，节线两边相位相同，也就是说 Z_2 为正， Z_1 也应为正，即 $Z_2 = Z_{环}$ ， $Z_1 = -Z_{小}$ ，则阶梯圆板辐射阻抗为： $Z = Z_1 + Z_2 = Z_{圆} - 2Z_{小}$ 。

$$\text{其中 } R = \frac{R_{圆} S - 2R_{小} S_{小}}{S} \quad (3)$$

$$X = \frac{X_{圆} S - 2X_{小} S_{小}}{S} \quad (4)$$

根据上式可知，只要求出圆板辐射阻抗与节圆内侧小圆部分的辐射阻抗就可以求出 Z 。

4 算例

取带有阶梯的圆板，其半径 $a = 15\text{cm}$ ，泊松比 $\sigma = 0.28$ ，计算自由边界阶梯圆板的辐射阻抗。根据自由边界圆盘振动频率方程和振动位移公式：

$$\frac{J_0(k_n a)}{J_1(k_n a)} + \frac{I_0(k_n a)}{I_1(k_n a)} = \frac{2(1-\sigma)}{k_n a}$$

$$y(\rho, t) = [AJ_0(k_n \rho) + BI_0(k_n \rho)] \exp(j\omega t) \quad \rho \in (0, a)$$

式中， $J_0(k_n a)$ 是零阶贝赛尔函数， $I_0(k_n a)$ 是零阶修正贝赛尔函数。根据以上两式可计算出一阶振动模式的 $k_n a$ 值及节圆半径 a_1 ， $k_n a = k_1 a = 2.99306$ ，

$a_1 = 0.68a$ 。文献[8]给出了弯曲振动圆盘辐射阻抗表达式:

$$R = \frac{2}{\left(1 + \frac{B}{A}\right)^2 a^2} \int_0^a [J_0(k_n \rho) + \frac{B}{A} I_0(k_n \rho)]^2 [1 - J_0(2k \rho)] \rho d\rho \quad (5)$$

$$X = \frac{2}{\left(1 + \frac{B}{A}\right)^2 a^2} \int_0^a [J_0(k_n \rho) + \frac{B}{A} I_0(k_n \rho)]^2 H_0(2k \rho) \rho d\rho \quad (6)$$

式中, $H_0(2k\rho) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(2k\rho \cos\theta) d\theta$ 为零阶斯特鲁夫(Struve)函数。首先计算圆盘辐射阻抗, 自由边界条件下, $\frac{B}{A} = -\frac{J_1(k_n a)}{I_1(k_n a)}$ 。将其代入上式即可得到:

$$R_{\text{圆}} = \frac{2}{\left(1 - \frac{J_1(k_n a)}{I_1(k_n a)}\right)^2 a^2} \int_0^a [J_0(k_n \rho) - \frac{J_1(k_n a)}{I_1(k_n a)} I_0(k_n \rho)]^2 [1 - J_0(2k \rho)] \rho d\rho$$

$$X_{\text{圆}} = \frac{2}{\left(1 - \frac{J_1(k_n a)}{I_1(k_n a)}\right)^2 a^2} \int_0^a [J_0(k_n \rho) - \frac{J_1(k_n a)}{I_1(k_n a)} I_0(k_n \rho)]^2 H_0(2k \rho) \rho d\rho$$

中间凸起的阶梯部分, 其边界条件为 $\rho = a_1$ 处位移为零, 即 $\frac{B}{A} = -\frac{J_0(k_n \rho)}{I_0(k_n \rho)}$, 将其代入式(5)、(6)中, 得:

$$R_{\text{小}} = \frac{2}{\left(1 - \frac{J_0(k_n \rho)}{I_0(k_n \rho)}\right)^2 a^2} \int_0^a [J_0(k_n \rho) - \frac{J_0(k_n \rho)}{I_0(k_n \rho)} I_0(k_n \rho)]^2 [1 - J_0(2k \rho)] \rho d\rho$$

$$X_{\text{小}} = \frac{2}{\left(1 - \frac{J_0(k_n \rho)}{I_0(k_n \rho)}\right)^2 a^2} \int_0^a [J_0(k_n \rho) - \frac{J_0(k_n \rho)}{I_0(k_n \rho)} I_0(k_n \rho)]^2 H_0(2k \rho) \rho d\rho$$

其中 $k_n a = k_1 a = 2.99306$, 节圆半径 $a_1 = 0.68a$, 代入以上两式, 利用高斯数值积分, 得到自由边界 $R_{\text{小}}$ 、 $X_{\text{小}}$ 随 ka 的变化关系。将 $R_{\text{圆}}$ 、 $X_{\text{圆}}$ 和 $R_{\text{小}}$ 、 $X_{\text{小}}$ 代入式(3)、(4)中, 可求得自由边界阶梯圆板辐射阻抗随 ka 的变化关系(如图3所示)。由图可知, 阶梯圆板的辐射阻抗是波数 k 和圆板半径 a 的函数, 辐射阻在高频段比低频段大, 辐射抗在高频段比低频段小; 当 $ka > 2$ 时辐射阻大于辐射抗。

5 结 论

本文在声压叠加原理的启发下, 从辐射声功率角度出发提出了阶梯板辐射阻抗算法迭加法。将阶

梯板沿着节线分为中心凸起(中心下凹)和外围圆环两部分, 分别计算出这两部分辐射阻抗并将其进行迭加, 即可计算出阶梯板的辐射阻抗。本文提出的辐射阻抗迭加法计算方法, 也可适用于其它类似于阶梯板的、复杂的辐射面的辐射阻抗计算。

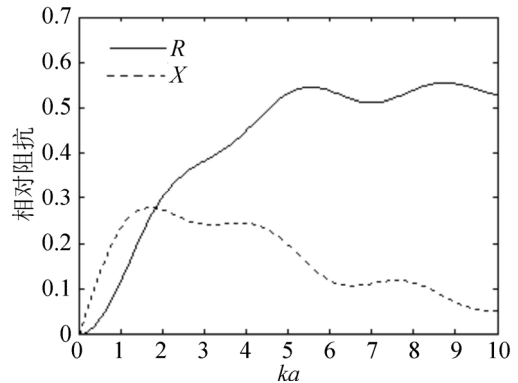


图3 自由边界阶梯圆板辐射阻抗随 ka 变化关系
Fig.3 Variation of radiation impedance of free boundary stepped circular plate with the product of the wave number k and the radius a

参 考 文 献

- [1] J.A. Gallego-Juarez, G. Rodriguez-Corral, E. Riera-Franco de Sarabia, C. Campos-Pozuelo, F. Vazquez-Martinez, V.M. Acosta-aparicio. A macrosonic system for industrial processing[J]. Ultrasonics, 2000, 38: 331-336.
- [2] SHA Kan, YANG Jun. A simple calculation method for the self and mutual-radiation impedance of flexible rectangular patches in a rigid infinite baffle[J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 282: 179-195.
- [3] 何祚铺. 声学理论基础[M]. 北京: 国防工业出版社, 1981: 179-188, 272-278.
HE Zuoyong. The basic theory of Acoustics[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1981: 179-188, 272-278.
- [4] 周光平. 超声弯曲振动变幅杆的特性[J]. 声学技术, 2002, 21(3): 128-130.
ZHOU Guangping. The performance of ultrasonic flexural solid horn with simple shape[J]. Technical Acoustics, 2002, 21(3): 128-130.
- [5] 鲜晓军, 林书玉. 矩形辐射板弯曲振动复频换能器的研究[J]. 声学技术, 2007, 26(5): 1012-1013
XIAN Xiaojun, LIN Shuyu. Study on the multi-frequency sandwiched ultrasonic transducer with a block-like radiator[J]. Technical Acoustics, 2007, 26(5): 1012-1013.
- [6] 阎玉舜, 张串, 高克成. 复合弯曲振动换能器的相位阻抗变换穿孔板[J]. 声学技术, 1998, 17(2): 82-85.
YAN Yushuen, ZHANG Chuan, GAO Kecheng. Perforated plate for impedance and phase transformation applied to compound flexural transducer[J]. Technical Acoustics, 1998, 17(2): 82-85.
- [7] 郭业才, 赵渭俊, 郭焱. 组合圆形活塞声源远场指向特性的仿真研究[J]. 系统仿真学报, 2002, 14(4): 522-533.
GUO Yecai, ZHAO Weijun, Guo Yan. Far field directivity of built-up circular piston sound source [J]. Journal of System Simulation, 2002, 14(4): 522-533. 林书玉. 弯曲振动矩形薄板的辐射声场研究[J]. 声学与电子工程, 2000, (3): 13-18.
- [8] 张频, 贺西平, 汪彦军. 自由边界弯曲振动圆形薄板辐射阻抗研究[J]. 陕西师大学报, 2007, 35(3): 31-34.
ZHANG Pin, HE Xiping, WANG Yanjun. Radiation impedance of flexural thin circular plate of free boundary[J]. Journal of Shaanxi Normal University, 2007, 35(3): 31-34.