典型浅海声场环境中的简正波估计

杜金燕，孙 超
(西北工业大学声学工程研究所，西安 710072)

摘要：海洋环境的复杂性和多变性严重影响了水下信号处理系统的性能。若能在信号处理之前辨识出海洋环境参数，并将其融入信号处理框架中，则有希望提高信号处理器的性能，得到更好的滤波、检测、定位和跟踪效果。将海洋环境建模为高斯-马尔可夫模型，利用声速梯度数据和由 Kraken 模型得到的声压场数据，结合扩展的卡尔曼滤波器算法，实现了对简正波的估计。利用该模基处理方法，可以辨识出简正波的模函数和水平波数，并能估计出基阵所在位置的声压场。在两种典型浅海声场环境下进行的计算机仿真证明了算法的有效性。

关键词：模基辨识器；高斯-马尔可夫模型；简正波；扩展卡尔曼滤波器
中图分类号：TB566 **文献标识码**：A **文章编号**：1000-3630(2009)-06-0719-06
DOI 编码：10.3969/j.issn1000-3630.2009.06.008

Estimation of normal modes in classical shallow ocean acoustic environment

DU Jin-yan, SUN Chao
(*Institute of Acoustic Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an* 710072, *China*)

Abstract: The complexity and inconstancy of the ocean environment lead to low performances of signal processing system. If ocean environment parameters can be identified before signal processing and then incorporated into signal processing schemes, it is contemplated to improve overall processor performance and to achieve the better enhancement, detection, localization and tracking. Ocean environment is modeled as a Gauss-Markov process. According to the sound velocity profile and the pressure field derived from the Kraken model, the extended Kalman filter algorithm is used to perform estimation of normal modes. By this approach, the modal functions and the horizontal wave numbers of normal mode model can be identified, and the pressure field at the receiver array can be estimated. Simulations under two classical shallow water environments are performed for indicating the well performance of the algorithm.

Key words: model-based identifier; Gauss-Markov model; normal mode; extended Kalman filer

1 引 言

在海洋环境中，对目标的检测和定位一直是声纳系统的任务之一。通过改进潜艇的推进系统、采取一系列减振降噪措施以及对艇体进行流线型设计等，潜艇的辐射噪声大幅度下降，新型安静型潜艇的噪声级甚至已经低于海洋噪声的水平。潜艇辐射噪声级的下降严重影响了现有被动声纳的探测距离，使得传统的被动声纳系统越来越不能满足实战需求。同时，通过敷设由吸声材料制成的消声瓦，也大幅度降低了潜艇对中、高频信号的反射，因而大大缩短了目前工作在中、高频段的主动声纳的探测距离。另一方面，海洋环境的复杂性和多变性也对水声信号的传播产生很大影响[1]，长期以来常规信号处理方法忽视了海洋环境对回波信号的影响，必然导致处理增益的下降。因此，需要更成熟、更有效的技术来处理水声信号问题。一种比较自然的想法是将水声信号传播模型融入到信号处理框架中，希望能提高处理器的性能并且同时达到滤波、检测、定位、跟踪等目的。在水声信号处理中，将环境模型(传播、海底、海面特性、声速等)、测量模型(基阵)、噪声(环境噪声、船舶噪声、海面噪声等)模型与测量数据相结合，通过先进的处理算法实现对复杂海洋环境中声源(目标)的检测、滤波(信号增强)、定位、跟踪，并进一步估计模型参数，这种技术称为模基处理(Model-Based Processing，MBP)[2]。近年来水声界十分流行的匹配场处理(Matched-Field Processing，MFP)、匹配模处理(Matched-Mode Processing，MMP)以及模基匹配滤波处理(Model-Based Matched Filtering，MBMF)等，就是这一思想的体现。MFP 作为 MBP 的一种特例，

收稿日期: 2008-12-08; **修回日期**: 2009-03-09
基金项目: 国家安全重大基础研究项目(613660203014)
作者简介: 杜金燕(1983-)，女，山东无棣人，博士研究生，研究方向为基于模型的水声信号检测。
通讯作者: 杜金燕, E-mail: djyjane@gmail.com

是基于确定性的传播模型，将实际测量的声场数据与由传播模型计算出的拷贝场作互相关，求得一个性能表面，从而实现对声源的检测与定位[3,4]。然而匹配场处理对模型误差非常敏感，存在所谓的“失配”问题。

简单地说，模基信号处理是通过将物理现象和测量过程(包括噪声)的数学模型结合进处理器中来提取有用信息。这就可以将海洋的物理和动力学特性、测量系统、设备噪声、环境噪声和模型误差等以数学模型的形式引入到处理器中。模基处理方法的框架如图 1 所示。模基处理技术充分考虑了海洋环境的复杂性，能够随着海洋环境的变化“在线”地调整模型参数，可以被动地“倾听”海洋环境并“学习”或适应环境的变化，因此，模基处理技术有希望处理信噪比更低、更复杂的水声问题，具有很大的发展潜力。

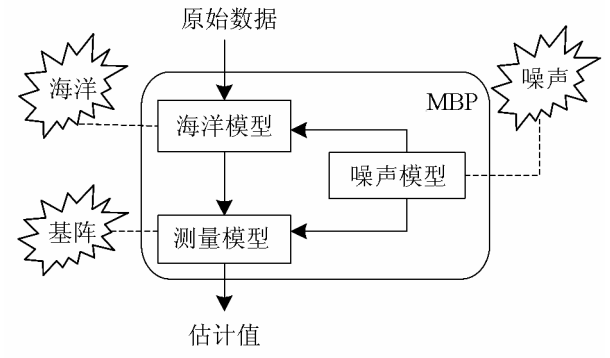


图 1 结合传播、测量和噪声模型的模基处理器

Fig.1 Model-based processor incorporating of propagation, measurement and noise models

作为 MBP 形式之一的模基辨识器(Model-Based Identifier，MBID)[5-8]利用声场数据，结合传播模型、测量模型和噪声模型，建立起信号的高斯-马尔可夫或增广的高斯-马尔可夫模型，利用卡尔曼滤波或扩展卡尔曼滤波算法，自适应地调整模型的参数，使之与基阵周围的海洋环境相吻合。本文在 MBID 的基础上，利用 Kraken 简正波传播模型[9]，根据基阵数据、环境参数以及声速梯度，估计模函数、水平波数以及基阵处的声压场，此外还能输出残差序列，用以监测嵌入在系统中的表征海洋环境声场和噪声场的模型的性能，并且利用残差序列改进模型。这为滤波、目标检测、定位、海洋环境反演等进一步应用提供了必要的参数估计。

2 高斯-马尔可夫模型的建立

利用声场的简正波模型和已知声源位置，可以用以下方法从基阵测量数据中估计出模态函数、水平波数和声压场等环境参数。

首先，将传播模型表示为状态空间形式。在由声速剖面和边界条件求得波数等基本参数的基础上，可以在状态空间里推导出模态函数和距离函数。对于距离无关的海洋环境，假设声源为简谐波，则距离函数的一个近似解可以由汉克尔函数给出，进而可以推导得到状态空间里的模态模型为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\boldsymbol{x}(z)=\boldsymbol{A}(z)\boldsymbol{x}(z) \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{x}(z)=[\boldsymbol{x}_1(z)\ \boldsymbol{x}_2(z)\cdots\boldsymbol{x}_M(z)]^{\mathrm{T}}{}_{2M\times1}$ 为状态向量，并且 $\boldsymbol{x}_m(z)=\left[\boldsymbol{\Phi}_m(z)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\boldsymbol{\Phi}_m(z)\right], m=1,\cdots,M$, $\boldsymbol{A}(z)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1(z) & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{A}_M(z)\end{bmatrix}_{2M\times2M}$，$\boldsymbol{A}_m(z)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\left(\frac{\omega^2}{c^2(z)}-\kappa_{rm}{}^2\right) & 0\end{bmatrix}$ $m=1,\cdots,M$，$\boldsymbol{\Phi}_m$ 表示第 m 号模函数，ω 为声源频率，c 为声速，它是深度 z 的函数，κ_{rm} 为第 m 号模函数对应的水平波数。

同时，得到测量模型为：

$$\boldsymbol{p}(z)=\boldsymbol{C}(z)\boldsymbol{x}(z) \tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{p}(z)_{L_z\times1}$ 为声压场，$\boldsymbol{C}(z)_{L_z\times2M}$ 为测量矩阵，L_z 为接收基阵的阵元个数。

模态模型描述的是简正波的模态在空间变化的过程，而测量模型将简正波模态与基阵实测数据联系起来，因此可以从状态向量得到基阵的输出。

然而，在实际的海洋环境中，声波传播受到海水的不均匀性、声速剖面(Sound Velocity Profile，SVP)随时间的缓慢变化以及海洋表面运动的影响，这时的海洋环境可以用高斯-马尔可夫过程来描述。因此调整模型包含进这些因素后可以得到近似的高斯-马尔可夫传播模型为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\boldsymbol{x}(z)=\boldsymbol{A}(z)\boldsymbol{x}(z)+\boldsymbol{w}(z) \tag{3}$$

$$\boldsymbol{p}(z)=\boldsymbol{C}(z)\boldsymbol{x}(z)+\boldsymbol{v}(z) \tag{4}$$

其中，$\boldsymbol{w}(z)$ 和 $\boldsymbol{v}(z)$ 分别为模型噪声和测量噪声，它们都是零均值高斯白噪声，相应的协方差矩阵为 $\boldsymbol{R}_{ww}$ 和 $\boldsymbol{R}_{vv}$。

高斯-马尔可夫过程包含了模型噪声和测量噪声的二阶统计特性。模型噪声包括 SVP 误差、远距离行船噪声、边界条件误差、海况影响以及海水的不均匀性等，而测量噪声包括近距离水下噪声场、接收传感器上的流噪声和电噪声等。高斯-马尔可夫模型除了能包含噪声信息以外，还可以计算均值和方差等统计特征。

建立起上述框架后，就可以利用扩展卡尔曼滤波理论定义一个可实现的递归处理器，也就是最小

均方误差估计器。在实际情况中，对海洋环境精确建模是不可能实现的，信号处理系统中所使用的模型和实际环境之间总有或大或小的差别，因此，最小均方误差设计的目的就是通过改善处理器对测量数据的一致程度使模型尽量接近实际环境。研究处理器的性质表明，当且仅当残差序列为零均值、“白”的时，可以认为处理器达到最佳处理性能。因此，将处理器应用于实际数据时，必须调整模型参数(通常是噪声协方差矩阵 $\boldsymbol{R}_{ww}$ 的元素)直到残差序列为零均值、“白”的。如果不能达到这个要求，那么说明模型不够完备，必须增加更多必要的因素。当模型建立完备后，处理器就可以根据输入数据自适应地调整模型的参数，达到优化参数、辨识海洋环境的目的。

3　模基辨识器的设计与迭代算法

对于简正波传播模型，利用 Kraken 模型，输入环境参数和声速梯度，将输出的水平波数和模函数作为 MBID 的初始状态向量，然后，利用扩展卡尔曼滤波器根据输入的声压值和输出的残差序列，自适应地调整模型参数，使模型能够很好地跟踪水声信号的高斯-马尔可夫过程，最后得到估计的状态向量和声压场数据。模基辨识器的结构如图 2 所示。

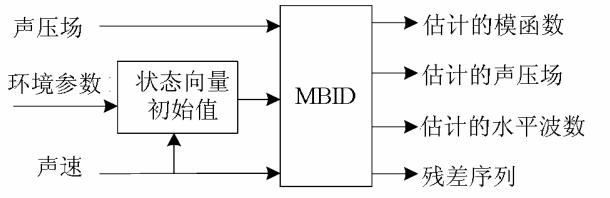


图 2　模基辨识器的结构
Fig.2　Structure of model-based identifier

此时，为了估计简正波的模函数和水平波数，取状态空间的状态向量为：

$$\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{x}_1(z)\cdots\boldsymbol{x}_M(z)\ \ \kappa_{r1}\cdots\kappa_{rM}]^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

其中，定义 $\Phi_{m2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\Phi_m$，则有 $\boldsymbol{x}_m(z)=[\Phi_m(z)\ \ \Phi_{m2}(z)]$, $m=1,\cdots,M$，Φ_m 表示第 m 号模函数，κ_{rm} 表示第 m 号模函数对应的水平波数。

模基辨识器的扩展卡尔曼迭代算法如下：

预测值为：

$$\hat{\Phi}_m(z_l|z_{l-1})=\hat{\Phi}_m(z_{l-1}|z_{l-1})+\Delta z_l\hat{\Phi}_{m2}(z_{l-1}|z_{l-1}) \tag{6}$$

$$\hat{\Phi}_{m2}(z_l|z_{l-1})=-\Delta z_l\left(\frac{\omega^2}{c^2(z_{l-1})}-\hat{\kappa}_{rm}{}^2(z_{l-1}|z_{l-1})\right)\times \hat{\Phi}_m(z_{l-1}|z_{l-1})+\hat{\Phi}_{m2}(z_{l-1}|z_{l-1}) \tag{7}$$

$$\hat{\kappa}_{rm}(z_l|z_{l-1})=\hat{\kappa}_{rm}(z_{l-1}|z_{l-1}) \tag{8}$$

$$\hat{\boldsymbol{P}}(z_l|z_{l-1})=\boldsymbol{A}[\hat{\boldsymbol{x}}(z_l|z_{l-1})]\hat{\boldsymbol{P}}(z_{l-1}|z_{l-1})\times \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}[\hat{\boldsymbol{x}}(z_l|z_{l-1})]+\boldsymbol{R}_{ww}(z_l) \tag{9}$$

式中，(z_l) 表示位于 z_l 处的参量，$(z_l|z_{l-1})$ 表示由位于 z_{l-1} 处的参量预测位于 z_l 处的参量，$(z_{l-1}|z_{l-1})$ 表示经过修正的位于 z_{l-1} 处的参量。$\hat{\Phi}_m$、$\hat{\Phi}_{m2}$ 和 $\hat{\kappa}_{rm}$ 组成状态向量 $\boldsymbol{x}$ 的预测值 $\hat{\boldsymbol{x}}$，Δz_l 为迭代步长，$\hat{\boldsymbol{P}}$ 为状态估计误差的协方差矩阵，$\boldsymbol{A}[\hat{\boldsymbol{x}}(z_l|z_{l-1})]=\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}\mathrm{a}[\boldsymbol{x}]\Big|_{\boldsymbol{x}=\hat{\boldsymbol{x}}(z_l|z_{l-1})}$ 为状态转移函数 $\mathrm{a}[\boldsymbol{x}]$ 的雅可比矩阵，过程噪声 w 为零均值高斯白噪声，$\boldsymbol{R}_{ww}$ 为过程噪声的协方差矩阵。

相应的声压场测量模型为：

$$p(r_{\mathrm{s}},z)=p(z)\big|_{r=r_{\mathrm{s}}}=C[\boldsymbol{x}]=\frac{\mathrm{i}}{\rho(z_s)\sqrt{8\pi r_s}}\times\sum_{m=1}^{M}\Phi_m(z_s)\Phi_m(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\kappa_{rm}r_s-\frac{\pi}{4}\right)}\frac{1}{\sqrt{\kappa_{rm}}} \tag{10}$$

其中，p 表示声压场，r_s 为声源的水平距离，z_s 为声源的深度，$\rho(z_s)$ 为声源深度处的海水密度。

残差为：

$$e(z_l)=p(r_{\mathrm{s}},z_l)-\hat{p}(r_{\mathrm{s}},z_l|z_{l-1}) \tag{11}$$

$$\boldsymbol{R}_{\varepsilon\varepsilon}(z_l)=\boldsymbol{C}[\hat{\boldsymbol{x}}(z_l|z_{l-1})]\hat{\boldsymbol{P}}(z_l|z_{l-1})\times \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}[\hat{\boldsymbol{x}}(z_l|z_{l-1})]+\boldsymbol{R}_{vv}(z_l) \tag{12}$$

式中，e 为声压测量值与估计值的误差，$\boldsymbol{R}_{\varepsilon\varepsilon}$ 为 e 的协方差矩阵，$\boldsymbol{C}[\hat{\boldsymbol{x}}(z_l|z_{l-1})]=\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}C[\boldsymbol{x}]\Big|_{\boldsymbol{x}=\hat{\boldsymbol{x}}(z_l|z_{l-1})}$ 为测量函数 $C[\boldsymbol{x}]$ 的雅可比矩阵，测量噪声 v 为零均值高斯白噪声，$\boldsymbol{R}_{vv}$ 为测量噪声的协方差矩阵。

增益为：

$$K(z_l)=\hat{\boldsymbol{P}}(z_l|z_{l-1})\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}[\hat{\boldsymbol{x}}(z_l|z_{l-1})]\boldsymbol{R}_{\varepsilon\varepsilon}^{-1}(z_l) \tag{13}$$

校正得到：

$$\hat{\boldsymbol{x}}(z_l|z_l)=\hat{\boldsymbol{x}}(z_l|z_{l-1})+K(z_l)e(z_l) \tag{14}$$

$$\hat{\boldsymbol{P}}(z_l|z_l)=\{\boldsymbol{I}-K(z_l)\boldsymbol{C}[\hat{\boldsymbol{x}}(z_l|z_{l-1})]\}\hat{\boldsymbol{P}}(z_l|z_{l-1}) \tag{15}$$

4　仿真实验与结果分析

4.1　仿真实验

为了验证上述方法的有效性，本文对两种情况下的海洋环境进行仿真实验：仿真Ⅰ，简单的两层浅海海洋环境及不变声速剖面；仿真Ⅱ，比较典型的浅海海洋环境。

仿真Ⅰ：假设一个水平分层的浅海波导环境，海底平坦，海深 68m，声源的水平距离为 5km，深度为 30m，频率为 100Hz。仿真中使用的海洋环境参数及声速剖面曲线如图 3 所示。

用 Kraken 简正波模型计算上述浅海声场中的

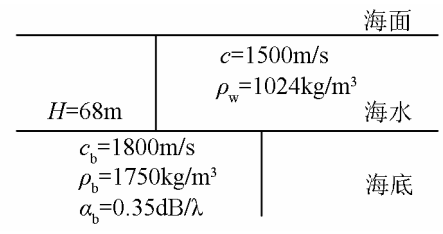


图 3 海洋环境参数和声速剖面 I

Fig.3 Ocean environment parameters and sound velocity I

表 1 水平波数的真值与估计值

Table 1 True values and estimations of horizontal wave numbers

$\kappa_r(m)$	水平波数	
	真值	估计值
1	0.4168–0.0000i	0.4167+0.0001i
2	0.4104–0.0000i	0.4106+0.0013i
3	0.3994–0.0000i	0.3995-0.0000i
4	0.3832–0.0001i	0.3861+0.0017i
5	0.3615–0.0002i	0.3616+0.0003i

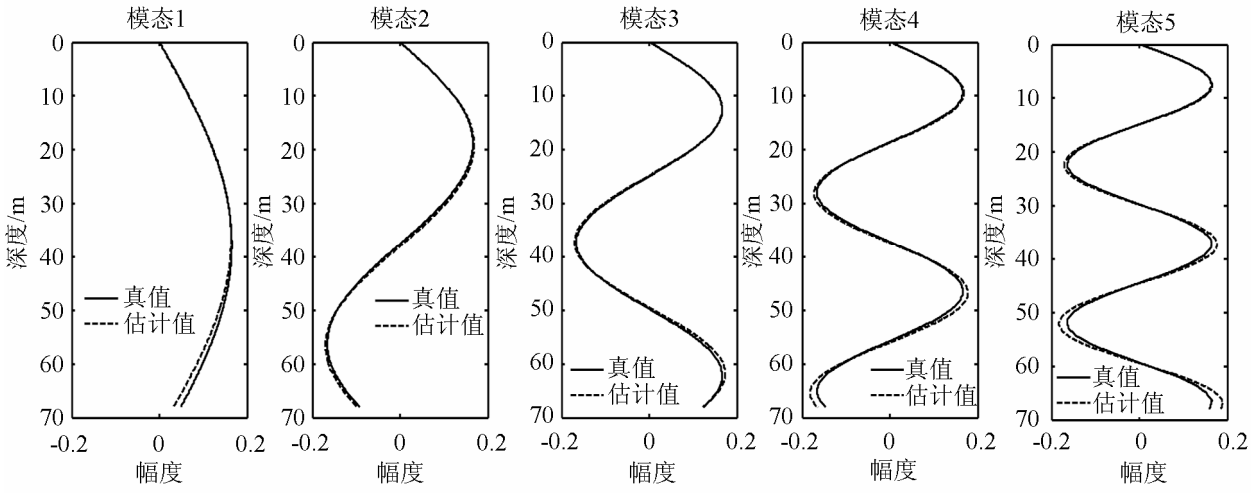


图 4 模函数的真值与估计值

Fig.4 True values and estimations of modes

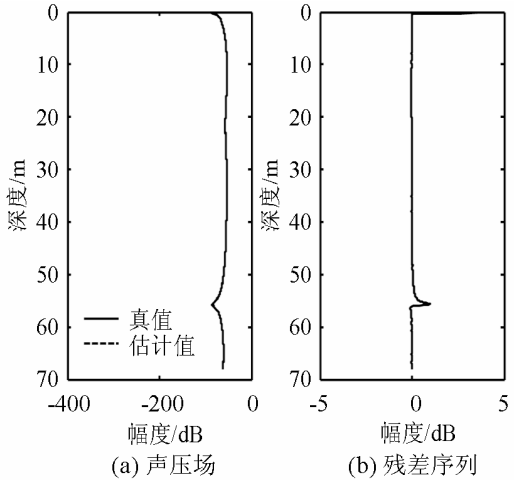


图 5 声压场估计和残差分布

Fig.5 Pressure field estimation and residual error

各号模函数 $\Phi_m(z_l)$、水平波数 $\kappa_r(m)$ 和模衰减系数 α_r。选取位于 z=1m 处的 5 个模函数值以及 5 个水平波数值作为 MBID 的初始值，利用第 3 节中所推导的声场模型，结合扩展卡尔曼滤波器算法，得到 MBID 输出的水平波数的估计值。水平波数的真值(即 Kraken 模型计算值)与 MBID 估计值的比较见表 1，各号模函数的估计值以及模型输出值见图 4，声压场的估计值和模型输出值以及残差分布见图 5。

仿真 II：同样假设水平分层的浅海波导环境，海深 198 m，声源的水平距离为 6 km，深度为 30 m，

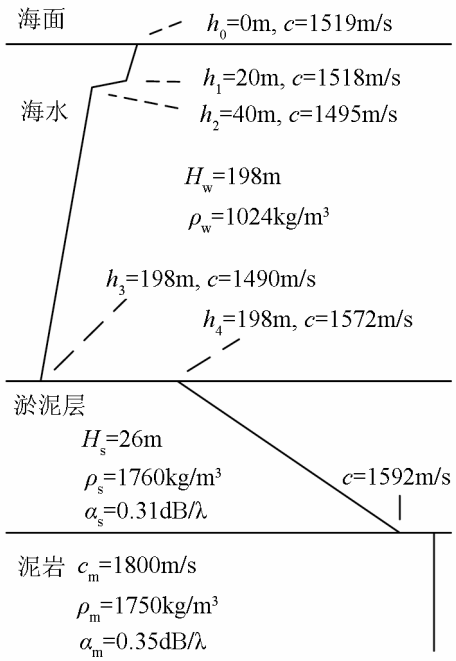


图 6 海洋环境参数和声速剖面 II

Fig.6 Ocean environment parameters and sound velocity II

频率为 50 Hz。仿真中使用的海洋环境参数及声速剖面曲线如图 6 所示。

可以得到水平波数的真值与 MBID 估计值的比较(见表 2)，各号模函数的估计值和真值的比较见图 7，声压场的估计值和真值以及残差分布见图 8。

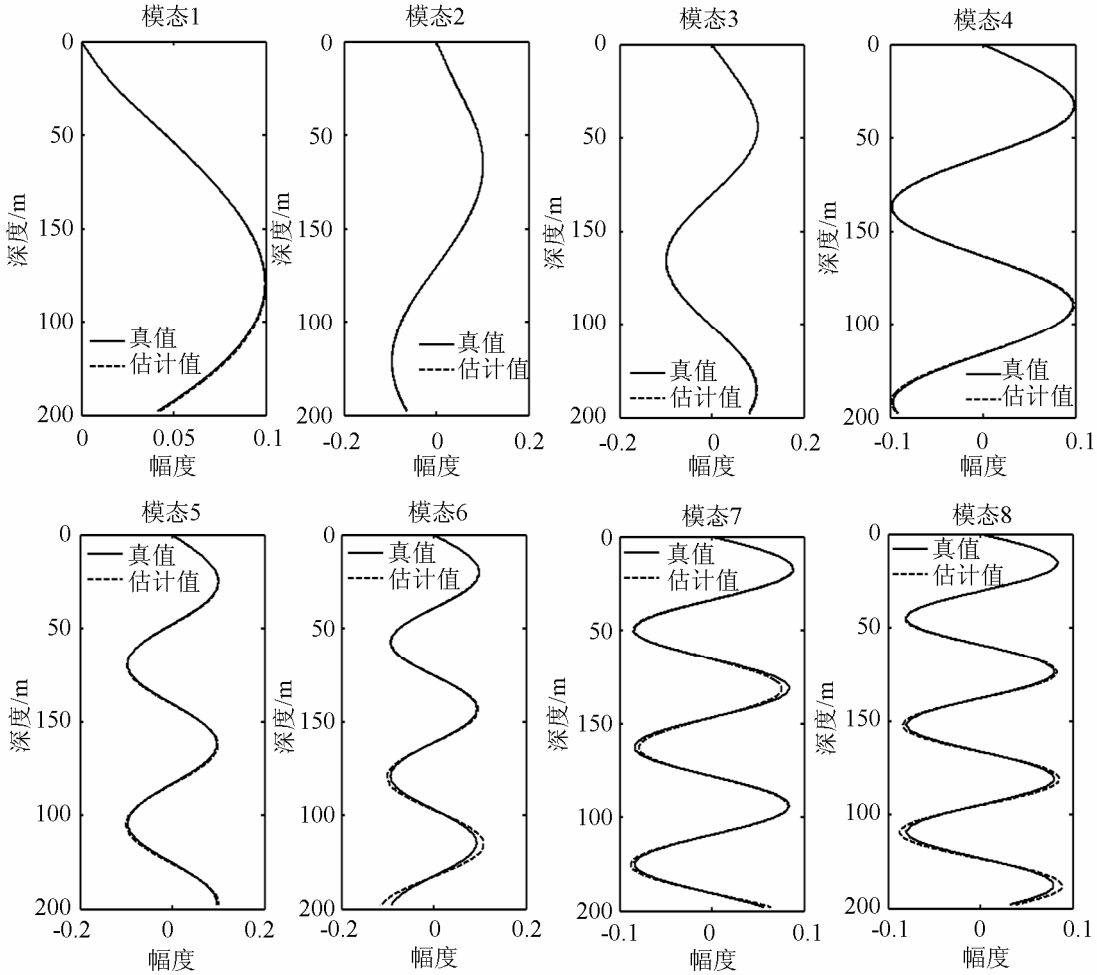
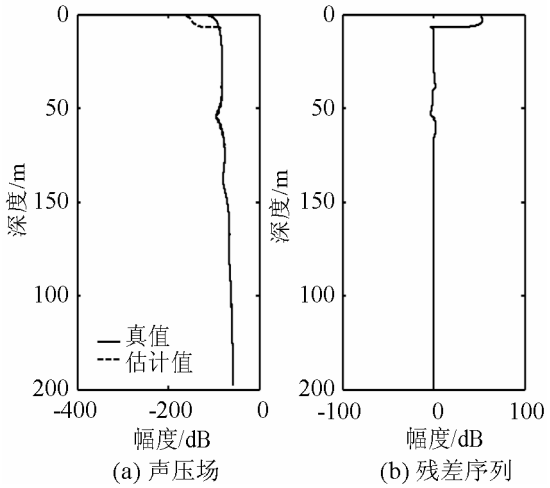


图 7　模函数的真值与估计值

Fig.7　True values and estimations of modes



(a) 声压场　　(b) 残差序列

图 8　声压场估计和残差分布

Fig.8　Pressure field estimation and innovations

4.2　仿真结果分析

从表 1 和表 2 可知，在两种海洋环境下水平波数的估计值与真值非常接近，从图 4 和图 7 可以看出，模函数的估计值与真值吻合也较好，而图 5 和图 8 通过对声压估计值与真值进行比较，说明 MBID 算法在迭代过程中是逐步收敛的，声压估计值也是比较好的。也就是说，利用该方法可以比较准确地辨识模函数和水平波数，并能估计出水听器所在距离处各个深度上的声压值。

表 2　水平波数的真值与估计值

Table 2　True values and estimations of horizontal wave numbers

$\kappa_r(m)$	水平波数	
	真值	估计值
1	0.2100−0.0000i	0.2100+0.0000i
2	0.2084−0.0000i	0.2084+0.0000i
3	0.2057−0.0000i	0.2057+0.0001i
4	0.2019−0.0001i	0.2019-0.0000i
5	0.1971−0.0001i	0.1971-0.0001i
6	0.1913−0.0002i	0.1911+0.0019i
7	0.1851−0.0003i	0.1848+0.0021i
8	0.1795−0.0003i	0.1795+0.0004i

从图 4 和图 7 中还可以看到，模基处理器对于低阶模态的估计要好于高阶模态，这可能是由以下原因造成的：(1) 模基处理器没有调整到最佳状态。

调整噪声协方差矩阵 $\boldsymbol{R}_{ww}$、$\boldsymbol{R}_{vv}$ 的各个元素和状态协方差矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的初值使得模基处理器达到最佳状态是一个很复杂的过程，很难达到绝对地“最佳”。(2) 处理器中使用的模型可能不够完备。(3) 由于实际中的噪声不一定是高斯的(例如，一般认为远距离行船噪声是服从泊松分布的)，而模型中将所有的海洋环境不确实性都归结为高斯噪声，因此，噪声模型的误差可能导致了高阶模态的估计误差。

同时，需要注意到扩展卡尔曼滤波器算法有两点主要缺陷：(1) 由于采用了 Taylor 展开近似，因此必须满足小扰动的假设，即假设非线性方程的理论解和实际解之差为小量。也就是说扩展卡尔曼滤波算法只适合弱非线性系统，对于强非线性系统，该假设不成立，此时，滤波性能极不稳定，甚至发散。(2) 必须计算雅可比矩阵，计算复杂，极易出错。

通过以上分析可以看到，模基处理器有以下优点：(1) 是递归的，每一次递归过程中都可以实时地处理测量数据；(2) 可以统计地表征噪声和模型的误差；(3) 不局限于平稳统计特征；(4) 可以扩展到使用线性或非线性的空-时变化的模型；(5) 在对声压场进行滤波的同时可以估计模函数和水平波数；(6) 通过检测测量数据和预测数据之间的残差可以监控自身的性能。然而它的缺点是计算量比较大，但是随着现代计算机速度的提高和低频率、浅海环境中计算量的减小，这已不是很严重的问题。

5 结 论

本文在 MBID 的基础上，利用 Kraken 简正波传播模型，根据基阵数据、环境参数以及声速梯度，在将水声信号建模为高斯-马尔可夫过程的基础上，利用扩展卡尔曼滤波算法较好地估计出了模函数、水平波数以及基阵处的声压场分布，此外还能输出残差序列，用以监测模型的性能，并且利用残差序列改进模型。这为滤波、目标检测、定位、海洋环境反演等进一步应用提供了必要的参数估计。

参 考 文 献

[1] 鹿力成，马力. 浅海海底模型对低频声传播的影响[J]. 声学技术, 2007, **26**(5): 787-793.
LU Licheng, MA Li. Effects of seabed model on low frequency sound propagation in shallow water[J]. Technical Acoustics, 2007, **26**(5): 787-793.

[2] Candy J V. Model-based signal processing[M]. New Jersey: John Wiley & Sons, 2006.

[3] 杨坤德，马远良. 浅海环境参数宽带匹配场反演研究[J]. 声学技术, 2002, **21**(3): 150-153.
YANG Kunde, MA Yuan-liang. Broadband matched-field inversion for shallow water environment parameters[J]. Technical Acoustics, 2002, **21**(3): 150-153.

[4] 邹士新，杨坤德. 几种优化算法在浅海匹配场反演中的性能比较[J]. 声学技术, 2005, **24**(1): 4-9.
ZOU Shixin, YANG Kunde. Performance comparison of optimization algorithms in matched field inversion[J]. Technical Acoustics, 2005, **24**(1): 4-9.

[5] Candy J V, Sullivan E J. Broadband model-based processing for shallow ocean environments[J]. J. Acoust. Soc. Am. (S0001-4966), 1998, **104**(1): 275-287.

[6] Sullivan E J, Candy J V. Space-time array processing: The model-based approach[J]. J. Acoust. Soc. Am. (S0001-4966), 1997, **102**(5): 2809-2820.

[7] Candy J V. Model-based detection in a shallow water ocean environment[A]. Proc of Oceans, MTS/IEEE Conference and Exhibition[C]. 2001: 769-775.

[8] 潘翔. 基于传播模型的目标定位和辨识[J]. 浙江大学学报(工学版), 2004, **38**(9): 1136-1139.
PAN Xiang. Target location and identification based on propagation model[J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2004, **38**(9): 1136-1139.

[9] Porter M B. The KRAKEN normal mode program[EB/OL]. http://oalib.hlsresearch.com/Modes/ index.html.