

# 实现最佳左右舷分辨的三线阵最佳阵间距研究

吴 碧, 王华奎, 汪 新

(广东湛江 91388 部队 93 分队, 湛江 524022, 广东)

**摘要:** 从理论上推导了三线阵最佳阵增益(最佳时-空处理)波束形成器, 并给出了高斯背景噪声下三线阵最佳空-时最佳线性处理系统和三线阵次最佳空-时最佳线性处理系统框图。然后在最佳波束形成器的基础上推导了三线阵最佳左右舷分辨的阵间距, 最后给出了详实的仿真结果论证理论推导。

**关键词:** 三线阵; 波束形成; 左右舷分辨; 最佳阵间距

中图分类号: TB556

文献标识码: A

文章编号: 1000-3630(2009)-06-0803-04

DOI 编码: 10.3969/j.issn1000-3630.2009.06.024

## Research on the optimum space between arrays of trinary-line array sonar for optimum port/starboard discrimination

WU Bi, WANG Hua-kui, WANG Xin

(Unit 91388, PLA, Zhanjiang 524022, Guangdong, China)

**Abstract:** The optimum array gain beamforming algorithm (OAGBF) of trinary-line array sonar is developed, and the flow chart for optimum and secondary optimum space-time signal processing system of trinary-line array sonar is obtained under the background of Gaussian noise. The optimum space between arrays of trinary-line array sonar for optimum port/starboard discrimination of OAGBF is derived. Finally, the detailed simulation result is given to certify the correctness of the theoretical derivation.

**Key words:** trinary-line array; beamforming; port/starboard discrimination; optimum space

### 1 引言

在声纳系统中, 波束形成是目标方位估计最常用的处理方法。为了检测噪声背景中的安静型目标, 被动声纳系统特别是拖曳式线列阵声纳近年来朝大孔径阵列、多基元方向发展, 以形成窄波束并获得高空间处理增益。但是, 在浅海环境中, 复杂的环境会使大孔径的单线阵性能急剧下降<sup>[1]</sup>。由于声场是一种三维结构, 为获取更多的声场信息, 国内外发展出了双线阵、多线阵系统<sup>[1-9]</sup>以提高声纳的探测性能。相比于双线阵, 三线阵不但有横向的孔径, 而且还具有纵向的孔径, 因而能获取更多的声场信息, 从而能极大地提高声纳探测性能。三线阵主要装备在潜艇上, 用于提高潜艇的探测性能, 目前美国已成功地把拖曳三线阵声纳装备在美国最新的佛杰尼亚级核潜艇上<sup>[10]</sup>。

布阵方式直接影响声纳的性能。在双线阵布阵方面国内外学者的研究表明<sup>[1-3]</sup>, 当双线阵布阵

间距为声纳中心频率的 1/4 波长时, 双线阵声纳有最佳的左右舷分辨性能。多线阵尤其是三线阵如何布阵、阵间距满足怎样的规律, 才具有最佳的左右舷分辨性能, 公开的文献较少。本文从理论上推导了三线阵最佳阵增益(最佳时-空处理)波束形成器, 在此基础上, 推导了三线阵最佳左右舷分辨的阵间距, 最后给出了理论推导的仿真结果。

### 2 最佳阵增益(最佳时-空处理)波束形成算法

从文献[10]得知: 对于三线阵而言, 如果三线阵在空间上呈等边分布(见图 1), 那么这种空间配置在理论上具有最小的 CRLB, 同时也拥有最小的总体敏感度, 即对阵形畸变有最好的宽容性。对于多线阵, 文献[11]提出了采用分级波束形成的方法。对于三线阵而言, 也可以采用类似的信号处理流程(见图 2), 三条线阵做完各自的波束形成之后, 接着就是如何把三条阵各自波束形成的结果进行处理, 形成了所谓的三线阵波束形成算法问题, 根据加权向量对如图 3 所示的换能器阵的三

收稿日期: 2008-07-13; 修回日期: 2008-10-08

作者简介: 吴碧(1974-), 女, 广东湛江人, 硕士, 研究方向为水声信号处理、水声通信。

通讯作者: 王华奎, E-mail: zjshaitan@163.com

路信号(A1、A2、A3)进行处理。在阵列信号处理问题中, 加权向量可根据不同的目的进行选取, 获得最大的阵增益, 或具有理想的指向性图。根据加权向量选择准则的不同, 三线阵波束形成算法可分为: 最佳阵增益(最佳时-空处理)波束形成算法、最佳左右舷分辨波束形成算法、自适应波束形成算法<sup>[10]</sup>。本文主要研究三线阵的最佳阵增益(最佳时-空处理)波束形成算法。

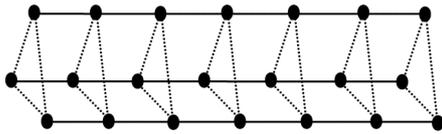


图1 三条线阵空间布置示意图  
Fig.1 Setup of a trinary-line array

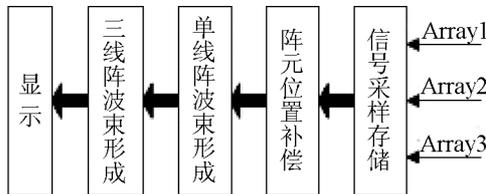


图2 三线阵信号处理流程框图  
Fig.2 Signal processing of trinary line-array sonar

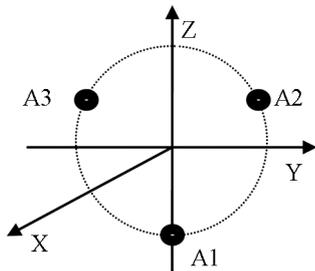


图3 三线阵的一个切面示意图  
Fig.3 Transection of a trinary line-array

最佳阵增益(最佳时-空处理)波束形成算法是从三线阵最大似然检测比中推导出来的, 对于被动声纳, 假设信号和噪声均为高斯过程, 考虑空间三维阵共有  $M$  个基元, 对于每个基元的输出信号采样  $TW$  个点, 得到时间序列:

$$x_i(k) = s_i(k) + n_i(k) \quad (1)$$

$$i = 1, \dots, M$$

$$k = 0, \dots, TW - 1$$

式(1)中,  $s_i(k)$  为信号,  $n_i(k)$  为噪声, 均为不相关高斯随机过程。对式(1)作傅立叶变换得到:

$$X_i(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_i(n) e^{-j2\pi nk/N}, k = 1, \dots, TW - 1 \quad (2)$$

取式(2)的前  $TW/2$  个点构成观测向量  $\mathbf{x} = [X_1(0), \dots, X_M(0), X_1(1), \dots, X_M(1), \dots, X_1(\frac{TW}{2}-1), \dots, X_M(\frac{TW}{2}-1)]^T$ , 同样可构成信号向量  $\mathbf{v}$  和噪声向量

$\mathbf{g}$ 。定义相应的功率谱密度矩阵  $\mathbf{R}_x = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^+]$ 、 $\mathbf{R}_s = E[\mathbf{s}\mathbf{s}^+]$ 、 $\mathbf{R}_n = E[\mathbf{n}\mathbf{n}^+]$  ( $+$ 表示共轭转置), 这些矩阵都是  $MN/2 \times MN/2$  维的对角矩阵, 每一块的维数是  $M \times M$ 。对于信号检测问题:

$$H_1: \mathbf{x} = \mathbf{s} + \mathbf{n} \quad H_0: \mathbf{x} = \mathbf{n} \quad (3)$$

根据文献[11],  $\mathbf{x}$  是一个高斯向量, 并具有以下形式的密度函数:

$$\begin{cases} p_0(\mathbf{x}) = \frac{\exp\{-\mathbf{x}^+ \mathbf{R}_n \mathbf{x}\}}{\pi^{MN/2} |\mathbf{S}_n|} \\ p_1(\mathbf{x}) = \frac{\exp\{-\mathbf{x}^+ (\mathbf{R}_s + \mathbf{R}_n) \mathbf{x}\}}{\pi^{MN/2} |\mathbf{S}_s + \mathbf{S}_n|} \end{cases} \quad (4)$$

根据式(3)、(4), 可以求出似然比为:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{|\mathbf{R}_n|}{|\mathbf{R}_s + \mathbf{R}_n|} \exp\{\mathbf{x}^+ [\mathbf{R}_n^{-1} - (\mathbf{R}_s + \mathbf{R}_n)^{-1}] \mathbf{x}\} \quad (5)$$

由  $\mathbf{A}^{-1} - (\mathbf{B} + \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{B} + \mathbf{A})^{-1}$ , 式(5)表示为:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{|\mathbf{R}_n|}{|\mathbf{R}_s + \mathbf{R}_n|} \exp\{\mathbf{x}^+ \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{R}_s (\mathbf{R}_s + \mathbf{R}_n)^{-1} \mathbf{x}\} \quad (6)$$

注意到  $\mathbf{S}_v(k)$  和  $\mathbf{S}_g(k)$  是对角矩阵, 式(6)的对数似然比为:

$$\ln \varphi = \ln \frac{|\mathbf{R}_n|}{|\mathbf{R}_s + \mathbf{R}_n|} + \sum_{k=0}^{N/2-1} \mathbf{x}^+(k) \mathbf{R}_n^{-1}(k) \mathbf{R}_s(k) (\mathbf{R}_s(k) + \mathbf{R}_n(k))^{-1} \mathbf{x}(k) \quad (7)$$

注意到  $\mathbf{R}_s(k)$  和  $\mathbf{R}_n(k)$  分别是对应第  $k$  个频率  $M \times M$  维信号和噪声的空间相关矩阵, 所以式(7)的对数似然比为还可以表示为:

$$\varphi_T = \sum_{k=0}^{TW/2-1} \mathbf{x}^+(k) \mathbf{R}_n^{-1}(k) \mathbf{R}_s(k) (\mathbf{R}_s(k) + \mathbf{R}_n(k))^{-1} \mathbf{x}(k) \quad (8)$$

定义入射信号对应第  $k$  个频点的基阵响应为  $\mathbf{d}(k)$ , 则有:

$$\begin{cases} s_i = s(n + \Delta_i) \\ \mathbf{s}_i(k) = s(k) \mathbf{d}(k) \\ \mathbf{R}_s(k) = E[\mathbf{s}(k) \mathbf{s}^+(k)] = \mathbf{S}_s(k) \mathbf{d}(k) \mathbf{d}^H(k) \end{cases} \quad (9)$$

其中  $\Delta_i$  为各阵元由于声程差而引起的时延量,  $\mathbf{S}_s(k)$  为信号  $s(n)$  在第  $k$  个频点的功率谱密度, 所以有:

$$\varphi_T = \sum_{k=0}^{N/2-1} \left\{ \mathbf{x}^+(k) \mathbf{R}_n^{-1}(k) \mathbf{S}_s(k) \mathbf{d}(k) \mathbf{d}^H(k) \cdot [\mathbf{S}_s(k) \mathbf{d}(k) \mathbf{d}^H(k) + \mathbf{R}_n(k)]^{-1} \mathbf{x}(k) \right\} \quad (10)$$

利用公式  $(\mathbf{A} + \mathbf{g}\mathbf{g}^+)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{g}\mathbf{g}^+ \mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{g}^+ \mathbf{A}^{-1} \mathbf{g}}$ , 可表示为:

$$\varphi_T = \sum_{k=0}^{TW/2-1} \frac{S_s(k) |\mathbf{d}^H(k) \mathbf{R}_n^{-1}(k) \mathbf{x}(k)|^2}{1 + S_s(k) \mathbf{d}^H(k) \mathbf{R}_n^{-1}(k) \mathbf{d}(k)} = \sum_{k=0}^{TW/2-1} H(k) |\mathbf{d}^H(k) \mathbf{R}_n^{-1}(k) \mathbf{x}(k)|^2 \quad (11)$$

$$H(k) = \frac{S_s(k)}{1 + S_s(k) \mathbf{d}^H(k) \mathbf{R}_n^{-1}(k) \mathbf{d}(k)} \quad (12)$$

其中： $H(k)$  为最佳预选滤波器。对于三线阵波束形成，有：

$$\begin{cases} M=3 \\ d_i = \exp[jkr\sqrt{3}(\sin\alpha_i \sin\theta \sin\phi + \cos\alpha_i \cos\theta)] \\ \mathbf{R}_n(k) = \sigma_n^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho \\ \rho & \rho & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad i=1,2,3 \quad (13)$$

要确保图 3 中 A1、A2、A3 三路信号经过加权处理对噪声有最大的最大抑制能力，加权向量需根据最大阵增益准则来进行选取，即：

$$\mathbf{w}_{opt}(k) = \arg \max \frac{\sigma_s^2 \mathbf{w}^H(k) \mathbf{R}_x^H(k) \mathbf{w}(k)}{\mathbf{w}^H(k) \mathbf{R}_n(k) \mathbf{w}(k)} \quad (14)$$

$$k=1, \dots, TW-1$$

将式(14)对  $\mathbf{w}(k)$  求导，并令其等于零，即可得到最大阵增益准则下的最优权向量为：

$$\mathbf{w}_{opt}(k) = \mathbf{R}_n(k) \mathbf{d}(k) \quad (15)$$

由式(15)可看出，高斯背景噪声下高斯信号的最大似然检测系统是由最佳空间处理器和最佳时间处理器级联而成的，该最佳空时联合处理系统结构如图 4 所示。

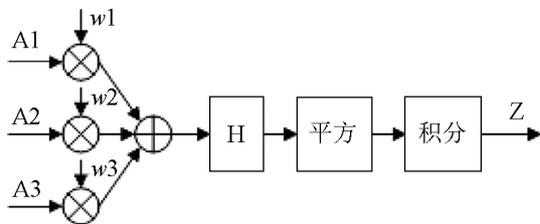


图 4 三线阵最佳空-时处理系统  
Fig.4 Optimum space-time processing of tribary-line array sonar

设计最佳预选滤波器需要预知噪声的频谱特征，一般情况下并非总能做到，因此预选滤波器的作用只有理论上的意义。在实际应用中，可将其略去，得到如图 5 所示的一种次最佳实现。

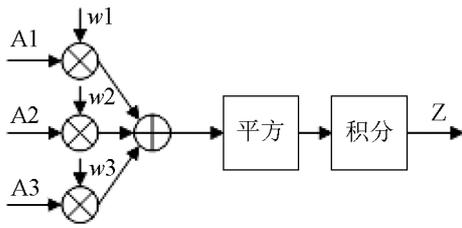


图 5 三线阵次最佳空-时处理系统  
Fig.5 Secondary optimum space-time processing of tribary-line array sonar

即有：

$$\varphi_r' = \sum_{k=0}^{TW/2-1} |\mathbf{d}^H(k) \mathbf{R}_n^{-1}(k) \mathbf{x}(k)|^2 \quad (16)$$

当束控方向为  $(\theta_0, \phi_0)$  时，定义基阵波束控制向量为：

$$\begin{cases} \mathbf{e}(k) = \{\mathbf{e}_1(k), \mathbf{e}_2(k), \mathbf{e}_3(k)\} \\ \mathbf{e}_i(k) = \exp[jkr\sqrt{3}(\sin\alpha_i \sin\theta_0 \sin\phi_0 + \cos\alpha_i \cos\theta_0)] \\ i=1,2,3 \end{cases} \quad (17)$$

显然，当  $\mathbf{d}=\mathbf{e}$  时，式(15)所表示的似然比最大，对于波束形成的这种空间滤波器，可以定义基于最大似然比的最佳滤波系数为：

$$\mathbf{w}'(k) = \mathbf{R}_n^{-1}(k) \mathbf{x}(k) \quad (18)$$

对它进行归一化得：

$$\mathbf{w}(k) = \frac{\mathbf{R}_n^{-1}(k) \mathbf{e}(k)}{\mathbf{e}^H(k) \mathbf{R}_n^{-1}(k) \mathbf{e}(k)} \quad (19)$$

### 3 线阵最佳左右舷分辨的阵间距

最佳波束形成的加权向量为  $\mathbf{w} = \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{d} / \mathbf{d}^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{d}$ ,

$\mathbf{R}_n = \alpha_n (1, \rho, \rho; \rho, 1, \rho; \rho, \rho, 1)$ ,  $\rho = \frac{\sin(kr\sqrt{3})}{1 + \alpha^2}$ ,  $\alpha^2 = \alpha_u^2 / \alpha_c^2$  为流噪声与相关噪声(海洋噪声)的比值，对  $\mathbf{R}_n$  求逆得：

$$\mathbf{R}_n^{-1} = \frac{\alpha_n}{2\rho^2 - \rho - 1} \begin{pmatrix} -1-\rho & \rho & \rho \\ \rho & -1-\rho & \rho \\ \rho & \rho & -1-\rho \end{pmatrix} \quad (19)$$

左右舷抑制比为  $\eta = |\mathbf{w}^H \mathbf{d}_+|^2 / |\mathbf{w}^H \mathbf{d}_-|^2$ ，其中：

$$\begin{cases} \mathbf{d}_+ = \{1, \exp(-\beta), \exp(\beta)\} \\ \mathbf{d}_- = \{1, \exp(\beta), \exp(-\beta)\} \end{cases} \quad (20)$$

$$\beta = \exp[jkr\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin\theta_0 \sin\phi_0 + \cos\alpha_i \cos\theta_0)]$$

式(20)中， $k$  为波数， $r$  为三线阵所围成的半径， $\theta$  为目标的方位角。

将式(19)代入式(20)，化简可以得到： $\eta = |\mathbf{d}_+^H (\mathbf{R}_n^{-1})^H \mathbf{d}_+|^2 / |\mathbf{d}_-^H (\mathbf{R}_n^{-1})^H \mathbf{d}_-|^2$ ，其中：

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_+^H (\mathbf{R}_n^{-1})^H \mathbf{d}_+ &= -3(\rho+1) + 2\rho[\exp(\beta) + \exp(-\beta)] + \rho[\exp(2\beta) + \exp(-2\beta)] \\ \mathbf{d}_-^H (\mathbf{R}_n^{-1})^H \mathbf{d}_- &= 2\rho - (\rho+1) + 2\rho[\exp(\beta) + \exp(-\beta)] - (\rho+1)[\exp(2\beta) + \exp(-2\beta)] \end{aligned}$$

要使  $\eta \rightarrow \infty$ ，必须使  $\mathbf{d}_+^H (\mathbf{R}_n^{-1})^H \mathbf{d}_- = 0$ ，因为：

$$\mathbf{d}_+^H (\mathbf{R}_n^{-1})^H \mathbf{d}_- = \rho - 1 + 4\rho \cos(\beta) - 2(\rho+1) \cos(2\beta) = 0 \quad (21)$$

实际情况中， $\rho \neq 0$ ，所以当  $\cos(\beta) = -1/2$  且  $\cos(2\beta) = -1/2$  时，三线阵最佳波束形成有最佳的左右舷抑制性能。当  $\mathbf{d}_+ = \mathbf{d}(-\pi/2, \pi/2)$ ，则  $\mathbf{d}_- = \mathbf{d}(\pi/2, -\pi/2)$ ，即当目标处于水平正横方位时，要使

三线阵最佳波束形成有最佳的左右舷抑制性能，有： $\cos(2kr\sqrt{3}/2)=-1/2$ ， $\cos(kr\sqrt{3}/2)=-1/2$ 。

求解可得，当  $r=2/3\sqrt{3}\times\lambda\times p$  时有最好的左右舷抑制性能， $p!=3$ ， $r=2\lambda/3\sqrt{3}$  所对应的三线阵的阵间距为  $d=2\lambda/3$ 。

在  $\rho=0$  的理想情况下，当  $r=1/3\sqrt{3}\times\lambda\times p$  时有最好的左右舷抑制性能， $p!=3$ ， $r=\lambda/3\sqrt{3}$  所对应的三线阵的阵间距为  $d=\lambda/3$ 。

图 6 是  $\rho\neq 0$ 、 $\alpha$  取不同的值的条件下，固定频率、固定角度 ( $\theta_0=90^\circ$ ， $\phi_0=90^\circ$ )、不同间距条件下三线阵最佳阵增益波束形成的左右舷分辨性能的仿真图，图 7 是图 6 的局部放大图。

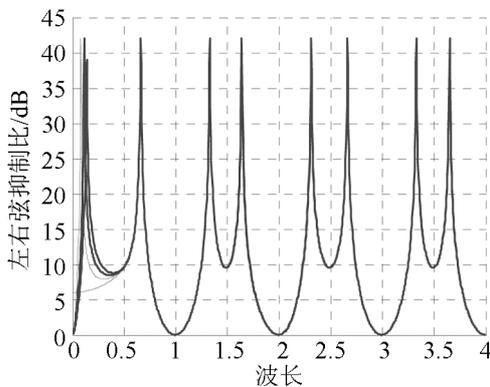


图 6 左右舷分辨性能的仿真图  
Fig.6 Simulation of port/starboard discrimination

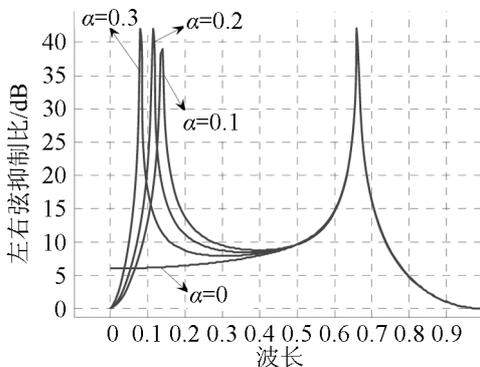


图 7 左右舷分辨性能的仿真局部放大图  
Fig.7 Scale up of Fig.6

图 8 是  $\rho=0$  的条件下，固定频率、固定角度 ( $\theta_0=90^\circ$ ， $\phi_0=90^\circ$ )、不同间距条件下三线阵最佳阵增益波束形成的左右舷分辨性能仿真图。

### 4 结 论

本文从理论上推导了最佳阵增益(最佳时-空处理)波束形成算法，及左右舷分辨条件下最佳阵增益波束形成的最佳阵间距。理论推导和仿真表明：当三线阵的三条阵之间的阵间距为  $2/3\times\lambda$  ( $p!=3$ ， $\lambda$  为三线阵工作频率所对应的波长)时，最佳阵增益

波束形成和自适应波束形成有最佳的左右舷分辨性能。

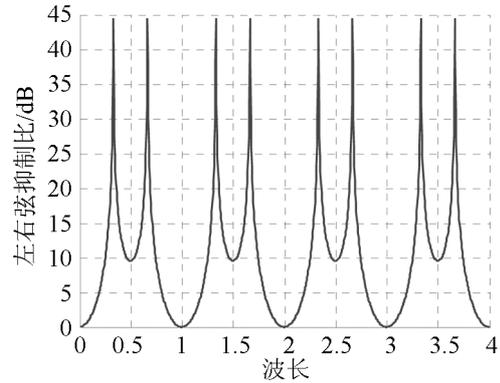


图 8 最佳阵增益波束形成的左右舷分辨性能的仿真图  
Fig.8 Simulation of port/starboard discrimination of OAGBF

### 参 考 文 献

- [1] Schurman I W. Reverberation rejection with a dual-line towed array. IEEE Journal of Oceanic Engineering, 1996; 21(2): 193-204.
- [2] Allensworth W S, Kennedy C W, Newhall B K, Schurman I W. Twin-line array development and performance in shallow water littoral environment[J]. Johns Hopkins APL Tech. Dig., 1995, 16: 222-232.
- [3] Feuillet J P, Allensworth W S, ewhall B K. Nonambiguous beamforming for a high resolution twin-line array[J]. J. Acoust. Soc. Am, 1995, 97(5): 3292.
- [4] 杜选民, 朱代柱. 拖线阵左右舷分辨技术的理论分析与实验研究[J]. 声学学报, 2000, 25(5): 395-402.  
DU Xuanming, ZHU Daizhu. Theoretical analysis and experimental research on port/starboard discrimination in towed array[J]. Acta Acustica, 2000, 25(5): 395-402.
- [5] 王华奎, 李启虎. 失配状态下的双线阵波束形成研究[J]. 声学学报, 2007, 32(2): 158-164.  
WANG Huakui, LI Qihu. Beamforming methods research on dual-line array with mismatch space between the two line arrays[J]. Acta Acustica, 2007, 32(2): 158-164.
- [6] 何心怡, 蒋兴舟, 张春华. 基于几何相移模型的双线列阵左右舷分辨技术研究[J]. 应用声学, 2004, 23(2): 38-44.  
HE Xinyi, JIANG Xingzhou, ZHANG Chunhua. A port/ starboard discrimination technology by twin-line arrays based on the model of geometric phase shifting[J]. Applied Acoustics, 2004, 23(2): 38-44.
- [7] 何心怡, 蒋兴舟. 基于时延估计的双线阵左右舷分辨技术研究[J]. 信号处理, 2003, 19(4): 338-342.  
HE Xinyi, JIANG Xingzhou. The research on the twin-line arrays port/starboard discrimination technology based on the time delay estimation[J]. Signal Processing, 2003, 19(4): 338-342.
- [8] 李启虎. 数字声纳设计原理[M]. 安徽教育出版社. 2002.  
LI Qihu. Principle of digital sonar design[M]. Education Publishing Company of Anhui Province, 2002.
- [9] Morgan D R, Smith T M. Coherence effects on the detection performance of quadratic array processors with applications to large-array matched field beamforming[J]. J. Acoust. Soc. Am, 1990, 87(2): 737-747.
- [10] 王华奎. 多线阵声纳信号处理关键技术研究[D]. 中国科学院声学所博士论文, 2007.  
WANG Huakui. Research on key signal processing technologies for towed multi-line array sonar[D]. P.H.D degree thesis of Chinese Academy of Sciences, 2007.
- [11] 郑兆宁, 向大威. 水声信号被动检测与参数估计理论[M]. 北京: 科学出版社, 1982.  
ZHENG Zhaoning, XIANG Dawei. Passive detection parameter estimation theory of hydroacoustic signal[M]. Science Publishing Company 1982.