

水池声场的快速计算方法

师俊杰, 吕云飞, 孙大军, 张俊

(哈尔滨工程大学水声技术国防科技重点实验室, 哈尔滨 150001)

摘要: 基于封闭空间声场理论计算水池声场存在收敛速度慢的问题, 提出了一种水池声场的快速计算方法, 该方法通过将水池声场表达式由三重无穷级数展开转化为二重无穷级数展开, x 、 y 和 z 三个方向本征值相互依赖等措施, 有效地提高了声场计算收敛速度。同时, 为避免计算溢出问题, 改进了声场计算策略, 保证了声场计算精度。数值仿真和试验都验证了该计算方法的有效性和正确性。

关键词: 收敛速度; 水池声场; 快速计算方法; 本征值

中图分类号: TB556

文献标识码: A

文章编号: 1000-3630(2011)-02-0144-04

DOI 编码: 10.3969/j.issn1000-3630.2011.02.007

Fast numerical solution of sound field in water tank

SHI Jun-jie, LÜ Yun-fei, SUN Da-jun, ZHANG Jun

(National Key Lab on Underwater Acoustic Technology, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

Abstract: A problem of convergence exists in computing the sound field in water tank through the wave theory in enclosing space. An efficient procedure for computation of the sound field in water tank is proposed in this paper, which adopts the following routines to achieve the fast-convergence: converting a triple sum infinite expression to a double sum one and making the eigenvalues in three orthogonal directions related to each other. In addition, another improved strategy is used to avoid the problem of computation overflow in PC implementation. Numerical simulation and tank trial have verified its effectiveness and correctness of this procedure.

Key words: convergence; sound field in water tank; fast numerical solution; eigenvalue

0 引言

矢量水听器已成为 21 世纪水声技术领域最有发展潜力的研究方向之一^[1]。随着水声领域诸多方面对低频矢量水听器的需求, 低频矢量水听器的水池校准研究逐渐提上日程^[2]; 而基于矢量水听器的目标噪声水池测量也渐露头角, 这些方面都需要对水池声场, 尤其是低频水池声场有一清晰的认识和详尽的理论分析。

水池作为水声测试的基础设施之一, 水池声场的研究一直受到水声学者的重视^[3-6]。在诸如镜像法^[3]等声场近似理论不能给出令人满意的声场计算结果时, 边界元和波动理论^[4-6]则凸显出其优越性, 如甚低频条件下水池声场空间分布研究。

水池声场波动理论^[4-5]多以 Morse 封闭空间声场理论^[7-9]为基础, 将 z 方向本征函数调整为满足水面压力释放边界条件而得到。该方法利用三重无穷级

数展开来逼近真实的水池声场, 同时水池 x 、 y 和 z 三个方向的本征值是相互独立的, 需要分别计算来合成某阶本征波数, 这就不可避免地造成数值计算的负担, 降低了声场计算的效率; 同时存在着声场计算收敛速度慢的问题。本文立足于改善这一问题, 将声场计算三重无穷级数展开转化为二重无穷级数展开^[10-11], 同时 z 方向的本征值通过 x 和 y 方向的本征值确定, 且随着 x 和 y 方向本征值的增大, z 向本征函数将呈现衰减趋势, 这些改善措施都进一步提高了声场计算的收敛速率, 改善了三重无穷级数展开法收敛慢的问题, 为水池声场的进一步研究提供了一种便捷的方法, 诸如在低频矢量水听器校准、AUV 噪声水池测量等方面的应用。

1 水池声场波动方程解

考虑一典型的矩形水池, 如图 1 所示。水池长为 l_x m, 宽为 l_y m, 水深为 l_z m, 水面为绝对软边界, 池底为阻抗性边界, 其余池壁则认为是绝对硬边界。点声源 S 置于水池 $r_0(x_0, y_0, z_0)$ 处连续辐射强度为 $q(\mathbf{r}, t) = Q \exp(j\omega t)$ 的简谐波。任意接收点 R (坐标为 $\mathbf{r}(x, y, z)$) 处的声压 $p(\mathbf{r}, t)$ 满足非齐次波动方

收稿日期: 2010-04-04; 修回日期: 2010-07-15

基金项目: 国家 863 计划(2006AA090200)

作者简介: 师俊杰(1980-), 男, 河南平顶山人, 博士研究生, 研究方向为声场研究及矢量信号处理。

通讯作者: 师俊杰, E-mail: junejieshi@gmail.com

程^[7-12]:

$$\nabla p(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{c^2 \partial t^2} = -\rho \frac{\partial q(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (1)$$

其中, ρ 和 c 分别为水密度和声速, 在水池有限的空间内认为是常数。

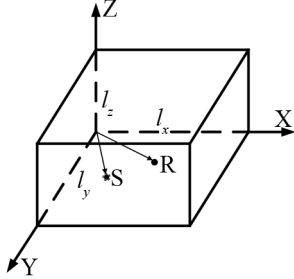


图 1 矩形水池示意图
Fig.1 Schematics of rectangular water tank

对方程(1)进行 Fourier 变换将其转化为 Helmholtz 方程形式^[7-11], 即:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right] p(\mathbf{r}, \omega) = -j\rho\omega Q \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0) \quad (2)$$

考虑到池壁四周为绝对硬边界, 利用分离变量法及封闭空间声场研究结果^[7-9], 声压 $p(\mathbf{r}, \omega)$ 可表示为^[10-11]:

$$p(\mathbf{r}, \omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{m\pi x}{l_x} \cos \frac{n\pi y}{l_y} Z_{mn}(z) \quad (3)$$

其中, $Z_{mn}(z)$ 须满足:

$$\left\{ \frac{\partial^2 Z_{mn}(z)}{\partial z^2} + \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{m\pi}{l_x} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{l_y} \right)^2 \right] Z_{mn}(z) \right\} \cos \frac{m\pi x}{l_x} \cos \frac{n\pi y}{l_y} = -j\rho\omega Q \delta(x-x_0) \cdot \delta(y-y_0) \delta(z-z_0) \quad (4)$$

利用 x 和 y 方向特征函数的正交性, 方程(4)两边分别乘以 $\cos \frac{m\pi x}{l_x} \cos \frac{n\pi y}{l_y}$ 并沿 x 和 y 方向积分, 对式(4)化简得到:

$$\frac{\partial Z_{mn}(z)}{\partial z^2} + k_z^2 Z_{mn}(z) = -\beta_{mn} \delta(z-z_0) \quad (5)$$

其中, $k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{m\pi}{l_x} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{l_y} \right)^2$, 由 x 和 y 方向本征值即可得到。式(5)中 β_{mn} 满足:

$$\beta_{mn} = \frac{j4\rho\omega Q}{(1+\delta_{m0})(1+\delta_{n0})l_x l_y} \cos \frac{m\pi x_0}{l_x} \cos \frac{n\pi y_0}{l_y} \quad (6)$$

其中, δ_{mn} 为 Kronecker-Delta 函数。

选取式(5)的特解形式^[12]为 $\frac{j\beta_{mn} \exp(jk_z |z-z_0|)}{2k_z}$,

则方程(5)的通解可表示为:

$$Z_{mn}(z) = A \exp(jk_z z) + B \exp(-jk_z z) + \frac{j\beta_{mn} \exp(jk_z |z-z_0|)}{2k_z} \quad (7)$$

同时, 式(7)满足的边界条件为:

$$\begin{cases} \varepsilon_z \frac{\partial Z_{mn}(z)}{\partial z} \Big|_{z=0} = jk_z Z_{mn}(z) \Big|_{z=0} \\ Z_{mn}(z) \Big|_{z=l_z} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

其中, ε_z 为比声阻抗, 当池底为绝对硬边界时其值趋向无穷大。从而得到方程(5)的解为:

$$Z_{mn}(z) = \begin{cases} \frac{\beta_{mn} (j\varepsilon_z k_z \cos k_z z_0 - k \sin k_z z_0) \sin k_z (l_z - z)}{k_z (j\varepsilon_z k_z \cos k_z l_z - k \sin k_z l_z)} & (z \geq z_0) \\ \frac{\beta_{mn} (j\varepsilon_z k_z \cos k_z z - k \sin k_z z) \sin k_z (l_z - z_0)}{k_z (j\varepsilon_z k_z \cos k_z l_z - k \sin k_z l_z)} & (z < z_0) \end{cases} \quad (9)$$

将式(9)代入式(3), 得到水池声场声压的最终表达式为:

$$p(\mathbf{r}, \omega) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{mn} \cos \frac{m\pi x}{l_x} \cos \frac{n\pi y}{l_y} \cdot \frac{(j\varepsilon_z k_z \cos k_z z_0 - k \sin k_z z_0) \sin k_z (l_z - z)}{k_z (j\varepsilon_z k_z \cos k_z l_z - k \sin k_z l_z)} & (z \geq z_0) \\ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{mn} \cos \frac{m\pi x}{l_x} \cos \frac{n\pi y}{l_y} \cdot \frac{(j\varepsilon_z k_z \cos k_z z - k \sin k_z z) \sin k_z (l_z - z_0)}{k_z (j\varepsilon_z k_z \cos k_z l_z - k \sin k_z l_z)} & (z < z_0) \end{cases} \quad (10)$$

当池底为绝对硬边界时, 式(10)可化简为:

$$p(\mathbf{r}, \omega) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{mn} \cos \frac{m\pi x}{l_x} \cos \frac{n\pi y}{l_y} \cdot \frac{\cos k_z z_0 \sin k_z (l_z - z)}{k_z \cos k_z l_z} & (z \geq z_0) \\ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{mn} \cos \frac{m\pi x}{l_x} \cos \frac{n\pi y}{l_y} \cdot \frac{\cos k_z z \sin k_z (l_z - z_0)}{k_z \cos k_z l_z} & (z < z_0) \end{cases} \quad (11)$$

在考虑四周池壁阻抗性边界条件时, 只须调整 x 和 y 方向的特征函数代入式(9)即可, 具体方法参见文献[8]。

式(10)和(11)与经典封闭空间声场三重无穷级数展开式^[4-5]相比有以下三个特点: (1) 声场表达式为两重级数展开形式, 降低了一重循环的计算负担; (2) x 与 y 方向的特征值是独立计算的, 而 z 方向的特征值则完全由 x 与 y 方向的特征值决定, 不需要再另外计算; (3) 随着参数 m 和 n 的不断增大, z 方向特征函数会变成深度方向的非均匀波动, 加速声场计算收敛速度, 有效提高计算速率。因而, 式(10)和(11)是一种有效的水池声场快速计算方法。

2 声场计算策略改进

观察式(10)和(11)可知, 随 x 和 y 方向特征值 m 和 n 的不断增大, z 方向波数 $k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{l_y}\right)^2$ 会小于 0, 且 k_z 虚部不断增大。对于余弦函数而言, $\cos(k_z l_z)$ 会是一个巨大的数值, 甚至会超出现有计算机的数值范围, 如 $\cos(j200) = 3.613E86$, 且会不断的带来舍入误差, 从而引起声场计算理论误差。因此, 有必要对式(10)或(11)进行计算策略改进。具体策略如下:

考虑 $z < z_0$ 时池底为理想绝对硬边界的情况。记 $k_z = a + jb$, 将 k_z 代入 $Z_{mn}(z)$ 重新整理得到:

$$Z_{mn}(z) = \beta_{mn} \left[\frac{e^{ja(l_z+z-z_0)} e^{-b(2l_z+z-z_0)} + e^{ja(l_z-z-z_0)} e^{-b(2l_z-z-z_0)} - e^{-ja(l_z-z-z_0)} e^{-b(z+z_0)} - e^{-ja(l_z+z-z_0)} e^{-b(z_0-z)}}{j2k_z [e^{jal_z} e^{-2bl_z} + e^{-jal_z}]} \right] \quad (12)$$

同理 $z \geq z_0$ 时的情况, 只须将式(12)中的参数 z 和 z_0 调换一下位置即可。因而 $Z_{mn}(z)$ 的整体简洁表达式为:

$$Z_{mn}(z) = \beta_{mn} \left[\frac{e^{ja(l_z-|z-z_0|)} e^{-b(2l_z-|z-z_0|)} + e^{ja(l_z+|z-z_0|)} e^{-b(2l_z+|z-z_0|)} - e^{-ja(l_z-|z+z_0|)} e^{-b(|z+z_0|)} - e^{-ja(l_z+|z-z_0|)} e^{-b(|z-z_0|)}}{j2k_z [e^{jal_z} e^{-2bl_z} + e^{-jal_z}]} \right] \quad (13)$$

式(12)和式(13)中分子分母都消除了项 e^{bl_z} 的影响, 保证数值计算时不至于溢出; 同时包含参数 b 的自然函数项 $e^{-b(\cdot)}$ 其值随着 b 的增大不断趋向于零, 加速了声场计算收敛速度。

3 数值及试验验证

为验证上述水池声场快速计算方法及计算策略改进的有效性, 考虑一个 $50\text{ m} \times 30\text{ m} \times 10\text{ m}$ 非消声水池, 仿真中假定五个池壁为绝对硬边界。声源置于水池中心连续辐射 30 Hz 单频信号, 测量沿 y 轴线方向 $15\sim 30\text{ m}$ 的声压变化, 并统计两种声场计算方法的计算时间。仿真从两方面进行: (1) x 和 y 方向计入相同简正波数目的条件下, 声场的逼真程度如何; (2) 同样声场幅值要求下, 需要计入的简正波数目如何。程序终止条件为: 如果当前计入简正波模式 N 的幅值与前 $N-1$ 个简正波模式之和的幅值相比小于 60 dB 则终止。时间统计采用的 PC 处理单元为 4 核 Intel®Core Q9400-2.66GHz。

图 2~3 中给出了两种验证条件下声场仿真计算及其试验测定结果的比较, 其中图 2(a)、3(a)中实线

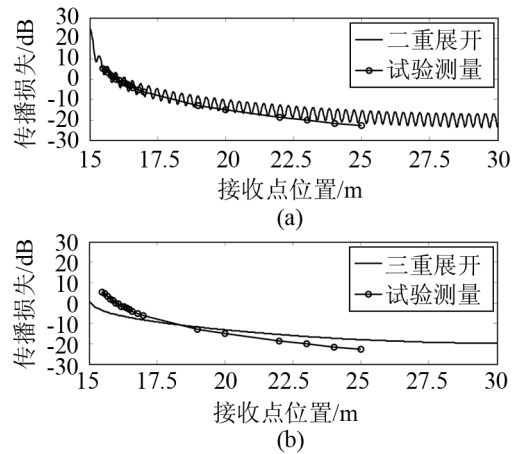


图 2 x 和 y 方向简正波数目相同条件下比较
Fig.2 Comparison in the condition of the same modal number in x and y direction

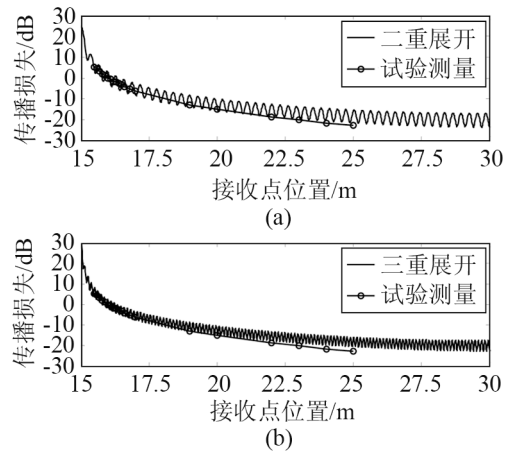


图 3 声场幅值要求相同条件下比较
Fig.3 Comparison in the condition of the same amplitude of sound field

为本文快速算法的声场计算结果, 图 2(b)、3(b)中实线为三重无穷级数展开法声场计算结果, 带圈实线为试验测量结果的拟合曲线。从图 2 中可以看出, 在计入简正波数目相同(40000)的条件下, 本文快速算法的声场计算结果与试验测量结果在声源近距离时一致性较好; 在较远距离处, 由于未考虑各个池壁的吸声效果, 计算结果较测量结果偏大一些。基于三重简正波展开法在近场则有较大的误差; 较远距离时只反映了声场变化的趋势, 而没有反映声场空间的波动。两种方法运行时间相当, 分别为 2.12 s 和 2.64 s , 但声场计算精度差异明显。如图 3 所示, 随着计入简正波数目的增多, 三重无穷级数展开法声场计算结果与本文算法声场计算结果完全一致。前者计入简正波数目为 1.25×10^8 , 计算时间为 $6.98 \times 10^3\text{ s}$, 合计 116.3 min ; 本文算法则只需计入 2.5×10^5 阶简正波, 计算时间仅为 17.5 s ; 同时, 声

场干涉特性结构变化是由于计入简正波数目增多的缘故。因此,本文水池声场的快速计算方法大大提高了数值计算速率,同时亦保证了声场计算结果的精度,为进一步的研究工作奠定了基础。

4 结论

本文针对三重无穷级数展开法计算水池声场时存在计算收敛速度慢的问题,引入了一种水池声场的快速计算方法,该方法通过调整改变 x 、 y 和 z 方向本征值的计算策略,将声场表达式由三重无穷级数展开转化为二重无穷级数展开,有效提高了声场的计算速率,在仿真条件下速率提高近 400 倍。另外,通过消除项 e^{bl} 对 $Z_{mn}(z)$ 的影响,有效解决了数值溢出问题,同时加速了声场计算收敛速度。最后,通过数值仿真和水池试验验证了该声场计算方法的快速效率和正确性。

参 考 文 献

- [1] 陈洪娟. 矢量传感器[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学出版社, 1996: 8.
Chen Hongjuan. Vector sensor[M]. HarBin: HarBin Engineering University Press, 1996: 8.
- [2] 吕云飞, 师俊杰, 孙大军, 等. 水池中低频矢量水听器灵敏度校准[J]. 压电与声光, 2009, 31(6): 814-816.
LÜ Yunfei, SHI Junjie, SUN Dajun, et al. The sensitivity calibration for low frequency vector sensor in tank[J]. Piezoel Ectrics & Acoustoopycs, 2009, 31(6): 814-816.
- [3] 李明睿. 消声水池声场仿真研究[J]. 声学及电子工程, 2006, 49(增刊): 78-81.
LI Mingrui. Simulation study of acoustic field in anechoic water tank[J]. Acoustics and Electrical Engineering, 2006, 49(suppl): 78-81.
- [4] 毛卫宁. 矩形水池中瞬态声场的数值研究[J]. 电脑应用技术. 1995(34): 20-22, 30.
MAO Weining. Numerical study of instantaneous sound field in rectangular water tank[J]. Computer Application Technology, 1995(34): 20-22, 30.
- [5] 毛卫宁, 方世良, 陆信人. 矩形水池中声能的衰变[J]. 声学技术, 1995, 15(4): 165-167, 177.
MAO Weining, FANG Shiliang, LU Jieren. Attenuation of acoustic intensity of water tank[J]. Technical Acoustics, 1995, 15(4): 165-167, 177.
- [6] 张文平, 张天元, 刘志刚, 等. 四壁倾斜水池点源低频声场特性的理论计算及实验测量[J]. 声学学报, 1996, 21(2): 128-134.
ZHANG Wenping, ZHANG Tianyuan, LIU Zhigang, et al. The calculation and measurement of low frequency sound field of a monopole source in a pool with four sides inclined[J]. Acta Acoustica, 1995, 21(2): 165-167.
- [7] 马大猷. 现代声学理论基础[M]. 北京: 科学出版社, 2004: 169-203.
MA Dayou. Principle of modern acoustics theory[M]. Beijing: Scientific Press. 2004: 169-203.
- [8] 杜功焕, 朱哲民, 龚秀芬. 声学基础[M]. 南京: 南京大学出版社, 2001: 432-449.
DU Gonghuan, ZHU Zheming, GONG Xiufen. Principle of acoustics[M]. Nan jing: Nan Jing University Press. 2001: 432-449.
- [9] P. M. Morse, K. U. Ingard. Theoretical acoustics[M]. Princeton University Press, 1986: 576-600.
- [10] Vera V. Markovic, Bratislav D. Milovanovic, et. al. Efficient Numerical Solution for Nonuniform Sound Field in a Rectangular Room[J]. Acustica, 1998, 84(3): 570-573.
- [11] Olivera R. Pronic, Vera V. Markovic, et al. Determination of Complex Resonant Frequencies in Rooms by Using Electromagnetic Acoustic Analogies[C]// Mediterranean Electrotechnical Conference, Melecon, 1998: 241-245.
- [12] Finn B. Jensen, William A. Kuperman, Michael B. Porter, Henric Schmidt. Computational ocean acoustics[M]. New York: Springer-Verlag, 1994: 57-58.