

基于重构核的最小二乘配点法求解封闭声腔响应

李鸿秋^{1,2}, 陈国平¹, 史宝军³

(1. 南京航空航天大学航空宇航学院, 南京 210016; 2. 金陵科技学院, 南京 211169; 3. 山东建筑大学机电学院, 济南 250101)

摘要: 基于重构核思想, 应用无网格配点法构造近似函数, 并利用最小二乘方法的原理解决边界问题, 离散控制微分方程, 建立求解的代数方程。并将此方法应用于封闭声腔响应的求解, 即对亥姆霍兹方程进行离散, 建立其最小二乘无网格配点格式。该方法的系数矩阵是对称正定的, 因而保证了结果的稳定性。通过数值算例分别验证了配点均匀分布与随机分布时此方法的精确性以及稳定性。与有限元方法相比较, 此方法不需要进行网格划分, 节点可随机分布, 且随着节点数目的增加, 其精度越来越高, 并具有良好的收敛性。

关键词: 声响应; 亥姆霍兹方程; 重构核配点法; 最小二乘原理;

中图分类号: TB532

文献标识码: A

文章编号: 1000-3630(2011)-06-0469-05

DOI 编码: 10.3969/j.issn1000-3630.2011.06.001

Analysis of acoustic response in closed cavity based on least-square point collocation method and kernel reproducing particle method

LI Hong-qiu^{1,2}, CHEN Guo-ping¹, SHI Bao-jun³

(1. Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China; 2. Jinling Institute of Technology, Nanjing 211169, China; 3. Shandong Jianzhu University, Ji'nan 250101, China)

Abstract: In this paper, approximate functions are constructed based on the principle of reproducing kernel particle method, and the least-square collocation method is used to solve boundary problems. The system coefficient matrix generated by this method is symmetric, which make sure of the results stable. A least-square collocation formulation based on kernel reproducing particle method is established for solving acoustic response in closed cavity. Helmholtz equation is then discretized. Several numerical examples of points distributed uniformly or randomly are analyzed. Compared with FEM, this method dose not need any initial mesh generation and mesh regeneration. Examples show whenever the points are distributed uniformly or randomly the results have good accuracy and convergence.

Key words: Acoustic response; Helmholtz equation; reproducing kernel particle method; least-square principle

0 引言

实际工程中, 对许多力学问题或场问题, 能用解析方法导出精确解的只是方程性质简单, 几何形状规则的少数问题。数值解法是解决这类问题普遍采用的方法, 无网格方法是近年来受到广泛关注的一种数值计算方法, 它不需要网格划分, 只需要知道节点信息, 可以克服有限元法等对网格的依赖性。因此, 无网格方法在涉及网格畸变、网格移动等问题时具有明显的优势^[1,2]。

现有的无网格方法主要有以下几类: 光滑粒子法、重构核法、散射元法、无网格 Galerkin 法、

Hp-Clouds 无网格法、单位分解有限元法、无网格局部 Petrov-Galerkin 法以及有限点法^[3-5]等。国外最早提出的一种无网格方法为光滑粒子法。Liu WK^[6]首先提出了重构核的方法, 重构核方法是一种基于核近似的无网格方法, 通过引入修正核函数进行重构核, 这样就可满足边界上的一致性条件从而提高求解精度。Liu 和 Chen^[7]又提出了多尺度重构核的方法, 这一方法主要应用于局部密化和收敛性研究。

本文基于重构核的思想, 应用最小二乘配点方法离散控制微分方程, 将其应用于封闭声腔响应的研究中, 建立了亥姆霍兹方程问题的最小二乘配点格式, 分别研究了节点均匀分布以及随机分布时数值结果的精确性以及稳定性。

1 重构核方法

重构核方法的关键就是通过建立一个修正核

收稿日期: 2010-12-31; 修回日期: 2011-03-16

基金项目: 863 国家高技术研究发展计划(2008AA12A205)、南京航空航天大学专项科研项目资助(NS2010006)

作者简介: 李鸿秋(1974-), 女, 讲师, 研究方向为振动与噪声控制。

通讯作者: 李鸿秋, E-mail: li_hongqiu@126.com

函数来构造函数 $u(x, y)$ ^[8], 以二维函数为例, 带有修正核函数的近似函数可表示为:

$$u^a(x, y) = \int_{\Omega} \hat{w}_d(x-s, y-t) u(s, t) ds dt \quad (1)$$

式(1)中, $\hat{w}_d(x-s, y-t)$ 称为修正核函数, 并且可以表示为:

$$\hat{w}_d(x-s, y-t) = C(x, y, s, t) w_d(x-s, y-t) \quad (2)$$

$C(x, y, s, t)$ 称为修正函数, 通过构造适当的修正函数可以得到满足不同精度要求的近似函数, 本文中修正函数采用多项式基函数的线性组合表示, 其最高阶次数取决于控制微分方程的最高阶导数, 当 $C(x, y, s, t) = 1$ 时, 式(2)就是经典的光滑粒子法(SPH法), SPH法用配点格式建立离散方程组, 比较容易实现, 但是精度较低, 稳定性也较差。

这里, 修正函数的形式如下所示:

$$C(x, y, s, t) = c_0(x, y) + c_1(x, y)(x-s) + c_2(x, y)(y-t) + c_3(x, y)(x-s)^2 + c_4(x, y)(y-t)^2 + c_5(x, y)(x-s)(y-t) \quad (3)$$

式(3)中, $c_0(x, y), c_1(x, y), \dots, c_5(x, y)$ 表示未知的修正系数, 如果控制微分方程只包含一阶导数项则只需前三项即可满足精度要求, 修正系数可以通过设定近似函数的重构条件来确定。

$$u(s, t) = u(x, t) - (x-s) \frac{\partial u}{\partial x} - (y-t) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{(x-s)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(y-t)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (x-s)(y-t) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dots \quad (4)$$

将修正函数(2)以及式(4)代入式(1)中, 可以得到:

$$u^a(x, y) = u(x, y) \tilde{m}_0(x, y) - \frac{\partial u}{\partial x} \tilde{m}_1(x, y) - \frac{\partial u}{\partial y} \tilde{m}_2(x, y) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tilde{m}_3(x, y) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tilde{m}_4(x, y) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \tilde{m}_5(x, y) \quad (5)$$

其中:

$$\begin{aligned} \tilde{m}_0(x, y) &= c_0 m_{00} + c_1 m_{10} + c_2 m_{01} + c_3 m_{20} + c_4 m_{02} + c_5 m_{11} \\ \tilde{m}_1(x, y) &= c_0 m_{10} + c_1 m_{20} + c_2 m_{11} + c_3 m_{30} + c_4 m_{12} + c_5 m_{21} \\ \tilde{m}_2(x, y) &= c_0 m_{01} + c_1 m_{11} + c_2 m_{02} + c_3 m_{21} + c_4 m_{03} + c_5 m_{12} \\ \tilde{m}_3(x, y) &= c_0 m_{20} + c_1 m_{30} + c_2 m_{21} + c_3 m_{40} + c_4 m_{22} + c_5 m_{31} \\ \tilde{m}_4(x, y) &= c_0 m_{02} + c_1 m_{12} + c_2 m_{03} + c_3 m_{22} + c_4 m_{04} + c_5 m_{13} \\ \tilde{m}_5(x, y) &= c_0 m_{11} + c_1 m_{21} + c_2 m_{12} + c_3 m_{31} + c_4 m_{13} + c_5 m_{22} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{且: } m_j(x, y) = \int_{\Omega} (x-s)^j (y-t)^j w_d(x-s, y-t) ds dt \quad (7)$$

很明显, 如果使 $u^a(x, y)$ 能够精确重构 $u(x, y)$, 重构条件如下:

$$\tilde{m}_0(x, y) = 1; \tilde{m}_k(x, y) = 0, (k=1, 2, \dots, 5) \quad (8)$$

因此, 式(6)可以写成如下的矩阵形式, 且重构

函数的系数可以由此式求出:

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{10} & m_{01} & m_{20} & m_{02} & m_{11} \\ m_{10} & m_{20} & m_{11} & m_{30} & m_{12} & m_{21} \\ m_{01} & m_{11} & m_{02} & m_{21} & m_{03} & m_{12} \\ m_{20} & m_{30} & m_{21} & m_{40} & m_{22} & m_{31} \\ m_{02} & m_{12} & m_{03} & m_{22} & m_{04} & m_{13} \\ m_{11} & m_{21} & m_{12} & m_{31} & m_{13} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

上式可写成如下的缩写形式:

$$\mathbf{MC} = \mathbf{B} \quad (10)$$

2 核函数系数导数的求解

2.1 核函数系数一阶导数的求解

近似函数 $u^a(x, y)$ 对 x 的一阶导数为

$$\frac{\partial u^a}{\partial x}(x, y) = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \{ \hat{w}_d(x-s, y-t) \} u(s, t) ds dt \quad (11)$$

将式(4)代入式(11), 则:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^a}{\partial x}(x, y) &= u(x, y) \tilde{m}_{0,x} - \frac{\partial u}{\partial x} (\tilde{m}_{1,x} - \tilde{m}_0) - \\ &\frac{\partial u}{\partial y} \tilde{m}_{2,x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (\tilde{m}_{3,x} - 2\tilde{m}_1) + \\ &\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tilde{m}_{4,x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} (\tilde{m}_{5,x} - 2\tilde{m}_2) \end{aligned} \quad (12)$$

式(12)中, $\tilde{m}_{0,x}$ 表示 $\partial m_0 / \partial x$, 其它各项有类似的表达。同近似函数的精确表达条件, 对 x 的一阶导数的精确表达条件为:

$$\tilde{m}_{0,x} = 0, \tilde{m}_{1,x} - \tilde{m}_0 = -1, \tilde{m}_{2,x} = 0 \quad (13)$$

$$\tilde{m}_{3,x} - 2\tilde{m}_1 = 0, \tilde{m}_{4,x} = 0, \tilde{m}_{5,x} - \tilde{m}_2 = 0$$

式(13)可写成如下的矩阵形式:

$$\mathbf{M}_x \mathbf{C} + \mathbf{MC}_x = \mathbf{0} \quad (14)$$

同理, 近似函数对 y 的一阶导数为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^a}{\partial y}(x, y) &= u(x, y) \tilde{m}_{0,y} - \frac{\partial u}{\partial x} \tilde{m}_{1,y} - \\ &\frac{\partial u}{\partial y} (\tilde{m}_{2,y} - \tilde{m}_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tilde{m}_{3,y} + \\ &\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} (\tilde{m}_{4,y} - 2\tilde{m}_2) + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} (\tilde{m}_{5,y} - \tilde{m}_1) \end{aligned} \quad (15)$$

对 y 的一阶导数的精确表达的重构条件为:

$$\tilde{m}_{0,y} = 0, \tilde{m}_{1,y} = 0, \tilde{m}_{2,y} - \tilde{m}_0 = -1 \quad (16)$$

$$\tilde{m}_{3,y} = 0, \tilde{m}_{4,y} - 2\tilde{m}_2 = 0, \tilde{m}_{5,y} - \tilde{m}_1 = 0$$

上式可写成如下的矩阵形式:

$$\mathbf{M}_y \mathbf{C} + \mathbf{MC}_y = \mathbf{0} \quad (17)$$

2.2 核函数系数二阶导数的求解

对二维问题, 式(14)进一步对 x 和 y 分别求导, 式(17)进一步对 y 求导, 同样可得如下的矩阵形式:

$$\begin{aligned} M_{,xx}C+2M_{,x}C_x+MC_{,xx} &=0 \\ M_{,yy}C+2M_{,y}C_y+MC_{,yy} &=0 \\ M_{,xy}C+M_{,x}C_y+M_{,y}C_x+MC_{,xy} &=0 \end{aligned} \quad (18)$$

2.3 基于重构核的配点法

重构核配点法是指将方程(1)的离散形式用于微分方程的求解, 设在区域 Ω 中有 N 个离散点, 则方程(1)的离散形式可写为

$$u^a(x, y) = \sum_{i=1}^N \hat{w}_d(x-x_i, y-y_i)u(x_i, y_i)\Delta V_i \quad (19)$$

修正核函数的离散形式可表示为

$$\hat{w}_d(x-x_i, y-y_i) = C(x-x_i, y-y_i)w_d(x-x_i, y-y_i) \quad (20)$$

其中

$$\begin{aligned} C(x-x_i, y-y_i) &= c_0(x, y) + c_1(x, y)(x-x_i) + \\ & c_2(x, y)(y-y_i) + c_3(x, y)(x-x_i)^2 + \\ & c_4(x, y)(y-y_i)^2 + c_5(x, y)(x-x_i, y-y_i) \end{aligned} \quad (21)$$

式(19)可按照形函数的形式写成

$$u^a(x, y) = \sum_{i=1}^N N_i(x, y)u_i \quad (22)$$

式(22)中, $N_i(x, y)$ 可被看做重构核方法中的形函数:

$$N_i(x, y) = C(x-x_i, y-y_i)w_d(x-x_i, y-y_i)\Delta V_i \quad (25)$$

对二维问题, 核函数可表示为

$$w_d(x-x_i, y-y_i) = \frac{1}{\alpha_x} w\left(\frac{x-x_i}{\alpha_x}\right) \frac{1}{\alpha_y} w\left(\frac{y-y_i}{\alpha_y}\right) \quad (26)$$

这里, α_x, α_y 分别为沿 x, y 方向的精化参数, 本文根据文献[9], 取 $\alpha_x = 1.17 * \Delta x, \alpha_y = 1.17 * \Delta y$, $\Delta x, \Delta y$ 分别为 x, y 方向的节点间距。核函数取三次样条函数, 即:

$$w(d_i) = \begin{cases} 0 & |d_i| > 2 \\ 1/6 \times (d_i + 2)^3 & -2 \leq d_i \leq -1 \\ 2/3 - d_i^2(1 + d_i/2) & -1 \leq d_i \leq 0 \\ 2/3 - d_i^2(1 - d_i/2) & 0 \leq d_i \leq 1 \\ -1/6 \times (d_i - 2)^3 & 1 \leq d_i \leq 2 \end{cases} \quad (27)$$

于是形函数的导数可根据下式计算:

$$\begin{aligned} N_{i,x} &= (C_{,x}w_d + Cw_{d',x})\Delta V_i \\ N_{i,y} &= (C_{,y}w_d + Cw_{d',y})\Delta V_i \\ N_{i,xx} &= (C_{,xx}w_d + 2C_{,x}w_{d',x} + Cw_{d'',xx})\Delta V_i \\ N_{i,yy} &= (C_{,yy}w_d + 2C_{,y}w_{d',y} + Cw_{d'',yy})\Delta V_i \\ N_{i,xy} &= (C_{,xy}w_d + C_{,x}w_{d',y} + C_{,y}w_{d',x} + Cw_{d',xy})\Delta V_i \end{aligned} \quad (28)$$

3 封闭空间的声场

设有一封闭空间, 外结构分为弹性和刚性表面两部分如图 1 所示, 考虑简谐激励情况忽略声腔内的流体阻尼, 则腔内声压分布 p 应满足亥姆霍兹方

程及封闭空间边界条件:

$$\begin{aligned} \text{Helmholtz方程: } \nabla^2 p + k^2 p &= f \\ \text{Dirchlet边界: } p_d &= \bar{p}_d \quad (d \in \Gamma_d) \\ \text{Neumann边界: } \nabla_n p_n &= p_n \quad (n \in \Gamma_n) \end{aligned} \quad (29)$$

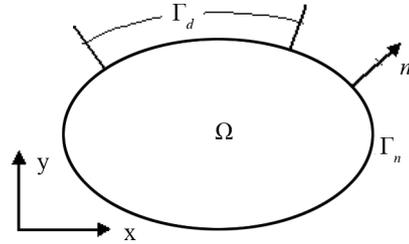


图 1 亥姆霍兹方程问题的几何表示
Fig.1 the geometric representation of Helmholtz equation

4 亥姆霍兹方程的最小二乘配点格式

最小二乘配点法的原理就是以控制微分方程在各离散点处误差平方总和为最小的条件来建立求解试函数的方程。

设在 Ω 内部有 N_i 个点, 在边界 Γ_d 上有 N_d 个点, 在边界 Γ_n 上有 N_n 个点, 则共计布有 $N_i + N_d + N_n$ 个点, 以近似值代入式(29), 则在 N_i, N_d, N_n 各离散点上的误差分别为:

$$\begin{aligned} R_i(x_i, y_i) &= L\hat{u}(x_i, y_i) - f(x_i, y_i), \quad i=1, 2, \dots, N_i \\ R_d(x_i, y_i) &= \hat{u}(x_i, y_i) - \bar{u}(x_i, y_i), \quad i=1, 2, \dots, N_d \\ R_n(x_i, y_i) &= \frac{\partial \hat{u}(x_i, y_i)}{\partial n} - \bar{u}_n(x_i, y_i), \quad i=1, 2, \dots, N_n \end{aligned} \quad (30)$$

式(30)可写做如下矩阵形式的残量方程:

$$R = Su - q \quad (31)$$

由式(31), 各离散点残量的方差总和为

$$J(u) = \sum_{i=1}^{NP} \frac{1}{2} R_i^T R_i \quad (32)$$

各离散点方差总和为最小的条件为

$$\frac{\partial J(u)}{\partial u} = 0 \quad (33)$$

于是可得到

$$Ku = Q \quad (34)$$

根据上式即可计算 $u_i (i=1, 2, \dots, NP)$, 代入近似函数的表达式(21)就可得到封闭声腔的响应值。

5 数值算例

根据上述原理编制了亥姆霍兹方程二维问题的最小二乘配点法的计算程序, 并给出典型算例, 与有限元解进行比较, 检验了该方法的精确性以及

稳定性。

(1) 微分方程及边界条件如下：

$$\nabla^2 u + u = 0$$

$$u(x=0, x=2)=1; u(y=0, y=2)=1$$

对此问题采取两种离散方案：一是离散点均匀分布，二是离散点随机分布。

图 2、3 是两种离散情况下所计算得到的 u 值。而图 4 则是有限元求解得到的结果。可见，无论是节点均匀分布还是随机分布，计算结果的误差都很小，尽管离散点不多，但是计算精度还是比较高的。

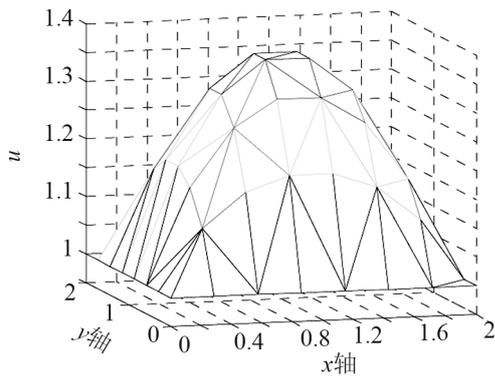


图 2 节点均匀分布情况下例 1 的计算结果

Fig.2 Numerical results for example 1 in the case of points distributed uniformly

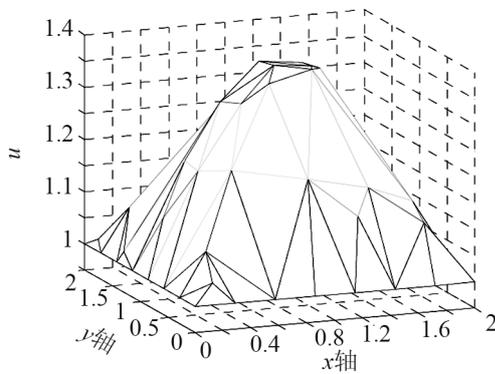


图 3 节点随机分布情况下例 1 的计算结果

Fig.3 Numerical results for example 1 in the case of points distributed randomly

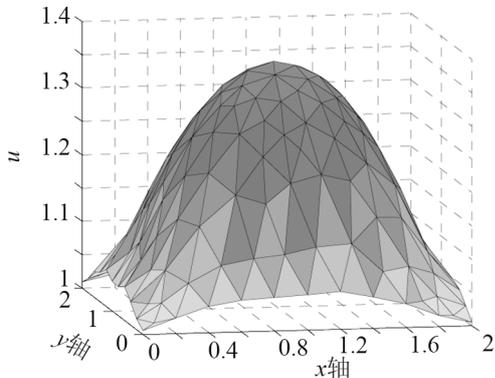


图 4 有限元方法求解例 1 的数值结果

Fig.4 Numerical results by FEM for example 1

(2) 微分方程及边界条件如下：

$$\nabla^2 u + 16 * u = 0$$

$$u(x=0, x=2)=1; u(y=0, y=2)=1$$

对此问题同样采取两种离散方案，图 5、6 则是节点均匀分布与随机分布两种离散情况下所计算得到的 u 值。图 7 则是有限元求解得到的结果。

可以看出，无论是节点均匀分布还是随机分布，本文给出的方法对节点分布情况并不敏感，且随着节点数目的增加，计算精度也进一步增加。

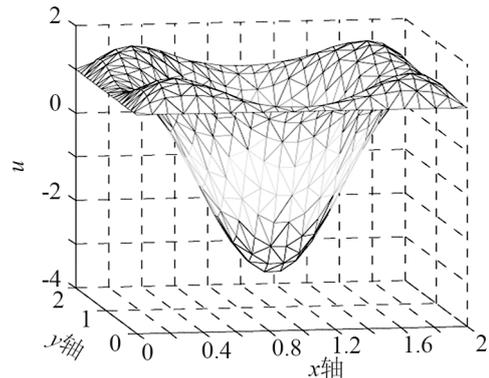


图 5 节点均匀分布情况下例 2 的计算结果

Fig.5 Numerical results for points for example 2 in the case of points distributed uniformly

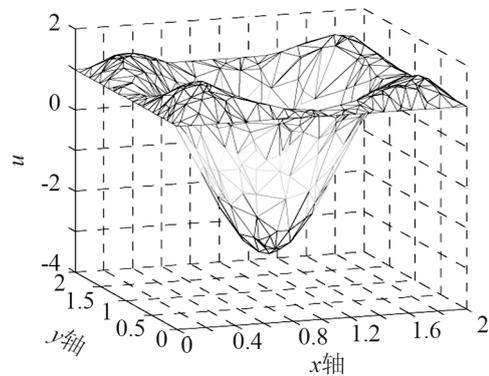


图 6 节点随机分布情况下例 2 的计算结果

Fig.6 Numerical results for example 2 in the case of points distributed randomly

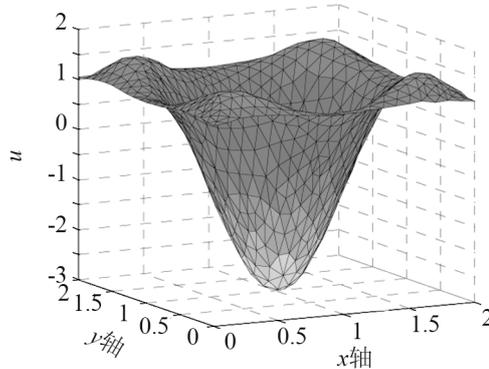


图 7 有限元方法解例 2 的数值结果

Fig.7 Numerical results by FEM for example 2

6 结论

本文将基于重构核的无网格方法应用于求解封闭声腔内的声压响应, 很好地解决了离散点随机分布问题以及边界问题。从计算结果来看具有以下优点:

(1) 本文中的方法是基于重构核思想的配点法。相比较于 Galerkin 方法, 配点法在求得区域内点的形函数及其导数后实施很直接。而 Galerkin 方法还需构造微分方程的弱形式并计算高斯积分。

(2) 基于 Galerkin 方法的重构核粒子法, 通过构造微分方程的弱形式可降低对高阶导数的要求, 其形函数的最高阶导数计算取决于微分方程的弱形式中的最高阶导数。而在配点法中, 要求计算的最高阶导数与微分方程中的最高阶导数是一致的。

(3) 边界条件问题一直以来都是无网格方法的难题, 而本文采取的最小二乘配点格式的无网格方法对于边界的处理是方便直接的。

通过数值算例发现, 无论是节点均匀分布还是随机分布的情况, 计算精度都比较高, 表明结果的稳定性, 且随着节点数目的增加, 精度也将越来越高, 且具有很好的收敛性。

参 考 文 献

- [1] 王建明, 周学军, 译. 无网格法理论与程序设计[M]. 济南: 山东大学出版社, 2007.
WANG Jianming, ZHOU Xuejun. An introduction to meshless methods and their programming[M]. Ji'nan: Shandong Univeristy Press, 2007.
- [2] LI S C, CHENG Y M, WU Y F. Numerical manifold method based on the method of weighted residuals[J]. Computational Mechanics, 2005, **35**(6): 470-480.
- [3] Gingold R A, Moraghan J J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and applications to non-spherical stars[J]. Mon Not Roy Astrou Soc, 1977, **181**: 375-389.
- [4] LIU Wing Kam, HAN Weimin. Reproducing kernel element method part I: theoretical formulation[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2004, **193**: 933-951.
- [5] Aluri S N, Zhu T L. The Meshless Local Petrov-Galerkin(MLPG) approach for solving problems in elasto-statics[J]. Computational Mechanics, 2000, **25**: 169-179.
- [6] LIU W K. Advances in multiple scale kernel particle methods[J]. Computational Mechanics, 1996, **18**(2): 73-115.
- [7] Liu W K, CHEN Y, Uras R A. Generalized multiple scale reproducing kernel particle[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, **139**: 91-157.
- [8] Aluru N R. A point collocation method based on reproducing kernel approximations[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000, **47**: 1083-1121.
- [9] 史宝军, 袁明武, 李君. 基于重构核思想的最小二乘配点型无网格方法[J]. 力学学报, 2003, **35**(6): 697-706.
SHI Baojun, YUAN Mingwu, LI Jun. Least-square point collocation method based on reproducing kernel ideas[J]. Acta Mechanica Sinica, 2003, **35**(6): 697-706.