

# 规整化最小二乘子空间相交测向技术探讨

巩玉振, 张秋生, 刘云涛, 蔡惠智

(中国科学院声学研究所, 北京 100190)

**摘要:** 在浅海条件下, 子空间相交的方法可以消除多途效应的影响, 实现水平长阵的准确目标方位估计, 获得比常规波束形成算法更优的性能。然而, 该算法在数值计算稳定性上存在问题。在最小二乘子空间相交算法的基础上, 提出一种 Tikhonov 规整化的最小二乘子空间相交算法, 该算法在原解向量的基础上, 施加了一个滤波因子, 滤除了小特征值对应的解向量, 使算法的数值计算稳定性大大提高, 从而也提高了算法的检测性能。试验数据处理结果表明, 该算法是有效的。

**关键词:** DOA 估计; Tikhonov 规整化; 子空间相交

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1000-3630(2013)-03-0198-05

DOI 编码: 10.3969/j.issn1000-3630.2013.03.005

## Discussion on regularized least-square subspace intersection DOA estimation method

GONG Yu-zhen, ZHANG Qiu-sheng, LIU Yun-tao, CAI Hui-zhi

(Institute of Acoustics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

**Abstract:** Bearing estimation is always a hard work in shallow water due to multimode nature of acoustic propagation in an oceanic waveguide. A new least-square subspace intersection (LSSI) method with Tikhonov's regularization is proposed. Subspace intersection method yields unbiased bearing estimates. But it involves an inverse problem with a highly ill-conditioned coefficient matrix. In order to compute stable solutions it is necessary to apply regularization method. It is shown that Tikhonov's regularization method is suitable for this problem, which can improve the robustness of LSSI algorithm. Results of processing sea-trial real data are presented.

**Key words:** DOA estimation; Tikhonov's regularization; subspace intersection

## 0 引言

在浅海环境中, 声传播受海洋波导界面的影响显著, 特别是海底的影响。在这种情况下, 传统的以平面波模型为基础的目标方位估计算法已不再适用, 简正波模型可以更准确地描述声场, 根据简正波理论, 声源在海洋波导中会激发出若干号简正波, 阵列的各阵元接收到的信号是各号简正波迭加的结果, 各号简正波的相速度是不同的, 特别是对于低频信号, 相速度的差别尤为明显, 这种差别在时域上反映为多途效应, 采用平面波假设必然会带来目标方位估计偏差。匹配场处理(Matched field processing, MFP)测向方法对声场用简正波模型表示, 消除了测向算法中多途效应的影响, 与常规平面波波束形成法相比, 有明显的优点。

MFP 测向的思想出现较早, 因巨大的建模和信号处理计算量, 未能在工程中使用。早在上世纪 90 年代, 为了减小浅海低频测向的误差, Naidu 研究了相干特性对大尺度阵列的匹配场测向的性能影响<sup>[1]</sup>; 后来 Candy 将子空间的思想用于匹配测向<sup>[2]</sup>; 宫在晓研究员的研究表明, 同一频率的声波, 各模态相速度不同, 参考声速的选取不当导致阵列在端点附近出现明显的测向误差, 并提出用声场匹配的方法做测向, 同时指出匹配场测向方法需要知道海洋环境参数, 且需要对三维空间进行极大值搜索, 计算量很大, 计算量和环境失配是要面临的问题<sup>[3]</sup>。

为解决 MFP 测向计算量大的问题, Lakshmipathi 等人提出了一种子空间相交(Subspace Intersection, SI)的算法, 在已知各号简正波的波数的情况下, 只需要对角度进行搜索, 可以用较小的计算量实现匹配测向, 较好地解决了建模计算量的问题<sup>[4]</sup>。SI 算法使用正交三角分解(QR Factorization), 在要分解的矩阵条件数很大时, 数值计算不稳定; 张爱民博士将子空间相交问题描述为最小二乘问题, 提出了最小二乘 SI 算法, 并提出了总体最小二乘算

收稿日期: 2012-06-02; 修回日期: 2012-09-15

作者简介: 巩玉振(1984-), 男, 山东新泰人, 博士研究生, 研究方向为阵列信号处理。

通讯作者: 巩玉振, E-mail: gongyuzhen@gmail.com

法，使算法在面临系数的扰动时更加稳健<sup>[5]</sup>。

正如所有的最小二乘问题一样，上述最小二乘 SI 算法中的方程求解存在着病态问题，通常情况下，不同号数简正波的波数相差很小，在有限阵长条件下，很难满足每个扫描向量线性无关的条件，矩阵的条件数很大，即该最小二乘问题的方程是病态的，数值计算的稳定性很差。病态问题的求解必须引入规整化处理，最常用的是 Tikhonov 规整化方法<sup>[6-8]</sup>。本文提出了最小二乘 SI 问题的 Tikhonov 规整化方法，使算法的性能和稳定性得到提高。

## 2 规整化最小二乘子空间相交算法

### 2.1 子空间相交及最小二乘子空间相交算法

根据简正波理论<sup>[9]</sup>，第  $n$  个阵元接收到的信号可以表示为

$$P_n(r_n, z) = \frac{\sqrt{8\pi}}{\sqrt{r_n}} \sum_{m=1}^M \Psi_m(z_s) \Psi_m(z) \sqrt{k_m} e^{-ik_m r_n - \beta_m r_n + i\pi/4} \quad (1)$$

其中， $M$  为简正波号数， $k_m$ 、 $\Psi_m$ 、 $\beta_m$  为第  $m$  号简正波的本征值、本征函数和衰减系数， $z$  为声源深度， $r_n = (r_0 + (n-1)d \cos \theta)$  为第  $n$  个阵元到声源的距离。

设接收声阵列的输出向量为

$$x(k) = \mathbf{P}(\phi) s(k) + n(k) \quad (2)$$

其中， $\mathbf{P}(\phi) = [P_1(r_1, z), \dots, P_N(r_N, z)]$ ， $s(k)$  为声源频谱， $n(k)$  为噪声。将阵列对各号简正波的响应表示为简正波的阵列响应矩阵：

$$\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta, k_1), \dots, \mathbf{a}(\theta, k_M)] \in C^{N \times M} \quad (3)$$

其中， $\mathbf{a}(\theta, k_m) = [1, \dots, e^{i(N-1)k_m d \cos \theta}]$ ，则可以利用信号子空间与各号简正波方位矢量构成的子空间的关系来确定目标方位，即为子空间相交方法，算法的计算流程如下：

(1) 根据数据样本估计阵列协方差矩阵  $\mathbf{R}$ ；

(2) 对  $\mathbf{R}$  进行特征值分解，并按照特征值大小将相应的特征矢量分为两组，得到信号子空间为  $\mathbf{S} = \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_J\}$

(3) 利用信号子空间及式(3)构造矩阵

$$\mathbf{D}(\theta_d) = \left[ \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{A}(\theta_d), \mathbf{U}_s \right] = \left[ \frac{a(v_1 \theta_d)}{\sqrt{N}}, \frac{a(v_2 \theta_d)}{\sqrt{N}}, \dots, \frac{a(v_M \theta_d)}{\sqrt{N}}, u_1, u_2, \dots, u_J \right] \quad (4)$$

对式(4)进行 QR 分解：

$$\mathbf{D}(\theta_d) = \mathbf{Q}(\theta_d) \mathbf{R}(\theta_d) \quad (5)$$

(4) 计算函数

$$B_{SI}(\theta_d) = \left[ \min_{M+1 \leq j \leq M+J} r_{jj}(\theta_d) \right]^{-1} \quad (6)$$

其峰值即对应于目标方位。

SI 方位估计方法仅需进行一维方位扫描，与传统的匹配场波束形成方法相比大大降低了建模计算量。但是，当方位扫描到目标方位时，拷贝子空间与信号子空间相交，矩阵的列矢量接近线性相关，即秩很小，对其进行 QR 分解必然导致较大的误差，从而导致子空间相交方法的方位估计性能严重下降，数值计算稳定性较差。

张爱民针对上述不足提出了最小二乘子空间相交方位估计方法<sup>[5]</sup>，将子空间相交的问题描述为最小二乘的问题，算法不再需要 QR 分解，计算稳定性大大提高。

根据子空间相交的原理，若某方位的阵列响应向量可以被简正波响应向量线性表示，那么该方位存在声源，即

$$\mathbf{A}(\theta) \mathbf{x} = \mathbf{U}_s \mathbf{y} \quad (7)$$

用最小二乘的方法求解，得到最小二乘子空间相交算法的空间谱估计值

$$B_{LS}(\theta) = \left[ \left\| \mathbf{A}(\theta) \mathbf{x}_c(\theta) - \hat{\mathbf{U}}_s \mathbf{y}_o(\theta) \right\|^2 \right]^{-1} = \frac{1}{1 - \lambda \max(\hat{\mathbf{U}}_s^H \mathbf{P}_{\mathbf{A}(\theta)} \hat{\mathbf{U}}_s)} \quad (8)$$

### 2.2 规整化最小二乘子空间相交算法

对于一个典型的最小二乘问题

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (9)$$

对  $\mathbf{A}$  做特征值分解

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^H \quad (10)$$

其中， $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N)$ ，为特征值矩阵。

可得最小二乘解

$$\mathbf{x}_{LS} = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{u}_i^H \mathbf{b}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i \quad (11)$$

其中， $\sigma_i$ 、 $\mathbf{u}_i^H$ 、 $\mathbf{v}_i$  分别为  $\mathbf{A}$  的第  $i$  个特征值、左特征向量、右特征向量。通常情况下，不同号数简正波的波数相差很小，在有限阵长条件下，很难满足在每个扫描角度上系数矩阵  $\mathbf{A}$  线性无关的条件，此时矩阵  $\mathbf{A}$  的最小特征值与最大特征值相差很大，从式(11)可以看出，方程的解将由小特征值对应的分量主导，而多数情况下，小特征值对应的分量是受噪声控制的，所以方程的解受噪声的影响很大，即方程(7)或(9)是病态的。

病态并不是说方程没有有意义的解，而是意味着采用标准的数值计算方法很难得到有意义的解。对于噪声污染下的病态方程组，规整化处理是必要的，也即加入关于期望解的额外信息，通常是最小范数约束，以使问题稳定，从而得到有意义的解。或者说，利用问题的物理意义，对问题增加更多的

约束, 使问题的解连续地依赖于观察数据。

规整化的方法有很多, 最常用的一类是 Tikhonov 规整化方法, 它是最小化方程的余差和范数约束, 得到规整化后的最小二乘形式如下:

$$\mathbf{x}_\lambda = \arg \min \left\{ \|\mathbf{Ax}-b\|_2^2 + \lambda^2 \|\mathbf{L}(x-x^*)\|_2^2 \right\} \quad (12)$$

标准形式下,  $\mathbf{L}=\mathbf{I}$ , 此时 Tikhonov 规整化最小二乘式(12)可以等价表述为

$$\min_x \left\{ \|\mathbf{Ax}-b\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{Lx}\|_2^2 \right\} \text{ subject to } y=\mathbf{Ax}-b$$

可得规整化后的最小二乘解

$$\mathbf{x}=(\mathbf{A}^T \mathbf{A}+\lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^T b \quad (13)$$

将系数矩阵  $\mathbf{A}$  做特征值分解

$$\mathbf{A}=\mathbf{U} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{V}^H \quad (14)$$

其中,  $\boldsymbol{\Sigma}=\text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N)$ , 为特征值矩阵。

得到式(13)的另一表达式:

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^r \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2+\lambda^2} \frac{\mathbf{u}_i^H b}{\sigma_i} \mathbf{v}_i \quad (15)$$

与未规整化的解式(11)相比, Tikhonov 规整化的最终效果是在解向量中加入一个滤波函数, 也即进行了特征向量空间的滤波, 将小特征值对应的项滤除, 减小了小特征值对应的特征向量的贡献, 从而修正了问题的病态。

从式(15)可以看到, Tikhonov 规整化的滤波因子有如下的形式:

$$f_i(\lambda)=\frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2+\lambda^2} \quad (16)$$

该滤波函数将对  $\sigma_i < \lambda$  的部分产生明显的滤波效果。

各种规整化方法的不同之处就在于如何设计合适的滤波因子, 滤波因子在规整化过程中将起到关键作用。

### 2.3 规整化因子的选择

从以上分析可以看出, 规整化因子的选取是非常关键的。在多数情况下, 使用 L 曲线法来确定该因子。L 曲线是遍历所有可行的规整化因子, 将规整化解向量的范数与对应的余差画成一条曲线, 将该曲线画在对数坐标轴上, 它往往显示为 L 型, 如图 1 所示, 这就是它名字的由来。随着规整化因子的变化, 它清楚地显示出在最小化解范数与方程余差的折衷。

如图 1 所示, L 曲线有垂直和水平的两条臂, 垂直的部分表示解向量的范数对规整化参数非常敏感, 扰动误差主导规整化解向量, 水平部分表示余差对规整化因子非常敏感, 解向量被规整化误差主导。

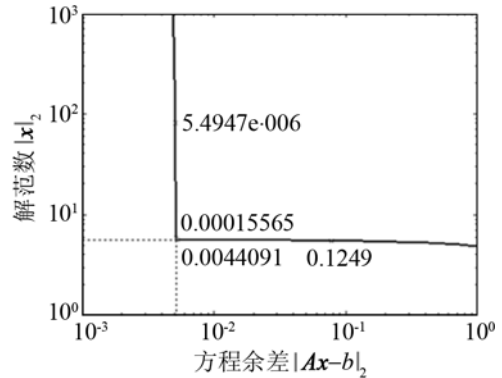


图 1 L 曲线示意图(坐标轴仅具算术意义, 无物理意义)  
Fig.1 Schematic diagram of L curve

L 曲线在 Tikhonov 规整化中扮演重要的角色, 它将象限分为两部分, 所有规整化解向量一定在曲线之上(或在曲线上)。规整化求得的解向量在给定余差的条件下具有最小的解范数, 反之亦然, 从这个意义上讲, 求得的解是最优的。

一般来说, 最优的规整化参数就在 L 曲线拐角附近, 也就是说, 只要定位 L 曲线的拐角, 找到其对应的规整化因子, 就可以得到最优规整化参数的一个近似值, 也就得到在两种方差中的较好的折衷。规整化因子  $\lambda$  控制着最小化余差和最小化范数约束之间的权衡, 显然, 大的  $\lambda$  将得到小的解范数, 代价是将会有大的余差; 小的  $\lambda$  则得到相反的效果。

### 3 试验介绍及结果分析

2005 年 11 月, 课题组进行了水平阵的目标检测试验, 试验布置如图 2 所示。水深为 30 m, 46 个阵元 2m、4m 不等间隔水平直线阵, 目标位于声阵的 20°方位左右。

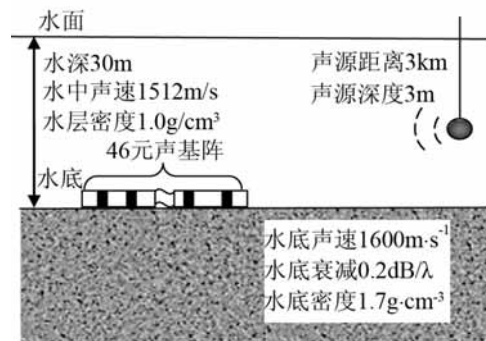


图 2 试验布置图  
Fig.2 Experiment configuration

试验中采用了两种声源信号, 分别是试验船的辐射噪声信号和由信号发生器发出频率为 700~800 Hz 的宽带信号, 其中试验船辐射噪声的处理频带为 150~300Hz。

以辐射噪声的处理结果为例, 画出未做规整化

时解向量式(11)中的各个分量,如图 3 所示。可以看到,该方程呈现明显的病态,系数矩阵的大小特征值相差很大(图中的三角线),约差 5 个数量级;而系数  $u_i^H b$  并不随特征值减小(图中的星点),这样造成的结果是  $x_{LS}$  中小特征值所对应的分量占主导地位(图中圈点),所以  $x_{LS}$  受噪声和计算取舍误差的影响很大。

对该组数据进行规整化操作,即在特征空间进行如式(16)的滤波操作,得到的滤波函数如图 4 所示,可以看到,小特征值对应的分量被充分压制。

为了确定最优的规整化参数  $\lambda$ , 做出该数据的 L 曲线,如图 5 所示,由定位曲线的拐角点得到最优规整化因子为 0.31168。

图 6 是规整化前后的测向结果比较,可以看到规整化之后波束主瓣宽度性能明显改善,平台效应消除,另外,旁瓣也较规整化之前低。

图 7 是 700~800 Hz 的宽带声源数据的处理结果,同样,规整化后测向性能得到改善。

### 4 结论

在浅海多途传播环境中,水平长阵模基测向的方法在端射附近的测向准确性、阵列增益方面优于

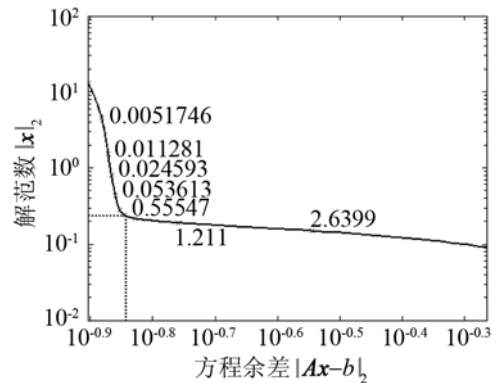


图 5 试验数据的 L 曲线  
Fig.5 L curve of trial data

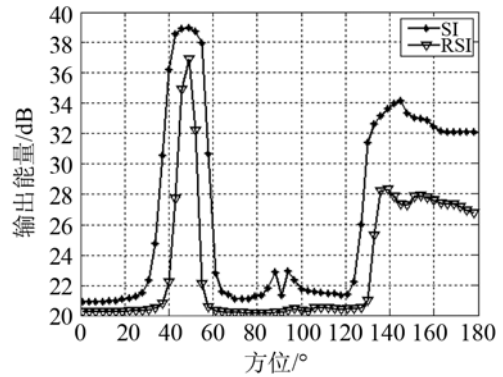


图 6 船噪声信号规整化前后的方位估计结果  
Fig.6 Beamforming results with and without Tikhonov's regularization of ship noise

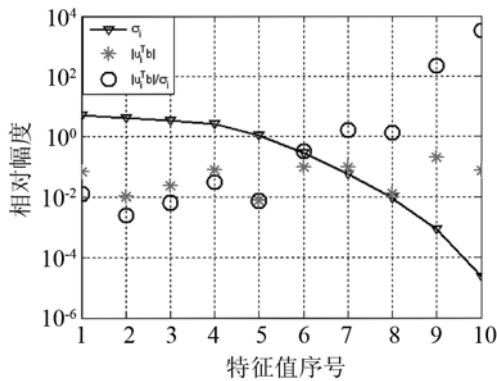


图 3 试验数据的解向量分解  
Fig.3 Solution decomposition of trial data

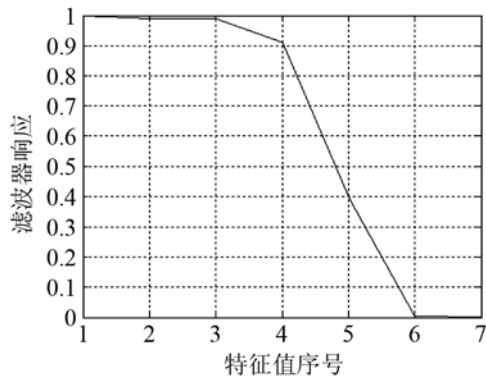


图 4 滤波函数示意图  
Fig.4 Schematic of solution filter

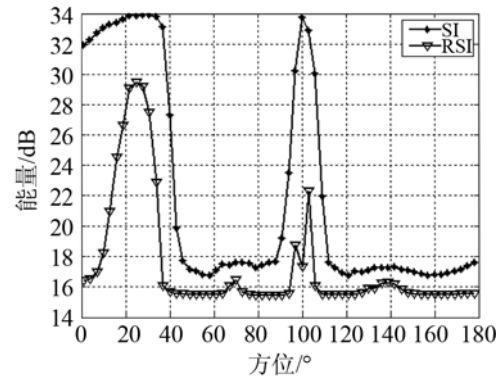


图 7 宽带信号源规整化前后的方位估计结果  
Fig.7 Beamforming results with and without Tikhonov's regularization of broadband signal source

常规 DOA 估计算法。

本文提出利用 Tikhonov 规整化改善最小二乘 SI 算法的数值计算稳定性,并对算法中涉及的规整化因子选择等做了解释和仿真,规整化之后,算法的 DOA 估计性能有了明显改善,试验数据的处理结果验证了算法的合理性。

目前,本算法没有考虑海底衰减的影响,另外算法的性能也取决于对简正波特征值建模的准确度,也即受环境参数的准确度影响较大。故算法适用于低衰减且水平变化不大的海底环境。

## 参 考 文 献

- [1] Naidu P S. On subspace method for source localization[J]. J. Acoust. Soc. Am., 1991, **90**(5): 2489-2491.
- [2] Candy J V. Ocean acoustic signal processing: a model-based approach[J]. J. Acoust. Soc. Am., 1992, **92**(6): 3185-3201.
- [3] 宫在晓, 林京, 郭良浩. 浅海声传播相速度对测向精度的影响[J]. 声学学报, 2002, **27**(6): 492-496.  
GONG Zaixiao, LIN Jing, GUO Lianghao. The effect of acoustic waves' phase speed on preciseness of DOA estimation in shallow water[J]. Acta Acoustica, 2002, **27**(6): 492-496.
- [4] Lakshmipathi S, Anand G V. Subspace intersection method of high-resolution bearing estimation in shallow ocean[J]. Signal Processing, 2004, **84**: 1367-1384.
- [5] 张爱民. 基于子空间的目标方位估计的若干问题研究[D]. 北京: 中国科学院声学研究所, 2005.  
ZHANG Aimin. Research on DOA estimation based on subspace method[D]. Beijing: Institute of Acoustics, Chinese Academy of Sciences, 2005.
- [6] Regularization Tools: A Matlab Package for Analysis and Solution of Discrete Ill-Posed Problems. <http://www.imm.dtu.dk/~pch>.
- [7] 邹谋炎. 反卷积和信号复原[M]. 北京: 国防工业出版社, 2001.  
ZOU Mouyan. Deconvolution and Image Recovery[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 2001.
- [8] Chne. H. Golub. Tikhnov regularization and totle least square. <http://drum.lib.umd.edu>
- [9] 张仁和, 何怡. 水平不变海洋声道中的 WKBZ 简正波方法[J]. 声学学报, 1994, **19**(1): 1-12.  
ZHANG Renhe, HE Yi. The WKBZ mode approach to soundpropagation in horizontal invariant ocean channels[J]. Acta Acoustica, 1994, **19**(1): 1-12.

## • 简 讯 •

## “MIP 高清音视频技术研讨会” 在上海召开

数字化、网络化是当前 AV(音视频)技术的发展方向。为了促进电声技术的学术交流, 推介专业音视频系统数字化、网络化的最新技术成就, 上海市声学学会电声专业委员会与上海新启邦威电子有限公司, 于 2013 年 5 月 30 日至 31 日在上海青浦银珠苑会议中心, 联合举办了“MIP 高清音视频技术研讨会”。会上, 上海新启邦威电子有限公司技术总监兆翦先生主讲, 详细阐述了 Jupiter-MIP 全交互系统平台的网络架构与工程应用; 接着作为实际案例, 上海气象台高级工程师杨礼敏介绍了高清时代的上海气象信息网络管理系统; 最后由中广电广播电影电视设计研究院周耀平先生讲述现代视频会议系统的工程设计方法。

参加这次会议的有上海市声学学会的会员、专家和教授等, 秘书长龚农斌教授亲临现场, 还有许多从事专业音视频行业的设计人员和工程技术人员, 以及全国各地从事智能建筑弱电工程的设计人员、集成公司的经理和指挥中心的技术人员等, 共计 380 多人。这次会议内容新颖, 反映热烈, 效果良好, 收到了与会者的普遍好评。

同济大学声学研究所 梁华