

# 低信噪比下重构协方差矩阵的高分辨 MUSIC 算法

杜梓冰, 杨坤德

(西北工业大学声学工程研究所, 西安 710072)

**摘要:** 在满足对称分布的海洋噪声场中, 为提高低信噪比条件下目标方位估计性能, 提出一种重构信号协方差矩阵的 MUSIC 算法。利用数据协方差矩阵虚部与对称噪声无关的性质, 根据协方差矩阵虚部和虚部 MUSIC 算法的预估角重构出信号协方差矩阵, 在此基础上实现 MUSIC 算法。仿真结果表明, 所提算法相比常规 MUSIC 算法能有效降低对称噪声的影响, 提高方位估计性能, 并避免双边谱的出现, 有更高的分辨率和更低的分辨门限。还研究了协方差矩阵的 Toeplitz 修正处理对于 MUSIC 类算法的改善作用。仿真表明, Toeplitz 修正处理能显著提高 MUSIC 类算法的分辨性能。

**关键词:** 对称噪声场; 低信噪比; 协方差矩阵重构; Toeplitz 修正; 高分辨

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1000-3630(2013)-05-0373-06

DOI 编码: 10.3969/j.issn1000-3630.2013.05.005

## High resolution MUSIC algorithm reconstructing covariance matrix in low SNR

DU Zi-bing, YANG Kun-de

(Institute of Acoustic Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, 710072, China)

**Abstract:** In the symmetrical distribution ocean noise field, in order to improve the direction-of-arrival (DOA) estimation performance in low signal-to-noise (SNR) conditions, a novel MUSIC algorithm that reconstructs the signal covariance matrix is presented. Based on the properties that the image part of data covariance matrix has no relation with the symmetric noise, the signal covariance matrix is reconstructed by using the image part of data covariance matrix and the DOA which is estimated by Image-MUSIC algorithm. Thus, the MUSIC algorithm is implemented. Simulation results show that the new algorithm effectively reduces the influence of symmetrical noise on DOA estimation and avoids bilateral spectrum arising, moreover the algorithm achieves higher resolution and lower resolution threshold in low SNR cases. Covariance matrix's Toeplitz modification that aims to improve the DOA estimation performance of MUSIC algorithm has also been studied, and simulation results show that the resolution of MUSIC algorithm is improved significantly.

**Key words:** symmetrical noise field; low SNR; covariance matrix reconstruction; Toeplitz modification; high resolution

## 0 引言

现代声纳目标方位(Direction of Arrival, DOA)估计越来越向高分辨、低信噪比方向发展。当阵列接收噪声为空间白噪声以及信噪比不是太低时,突破了瑞利限的MUSIC等子空间类算法有良好的空间谱分辨能力,已经成为DOA估计中最常用和最经典的算法<sup>[1]</sup>。研究表明,实际海洋环境噪声形式复

杂,多为色噪声<sup>[2]</sup>,此时传统的MUSIC等子空间算法性能急剧下降<sup>[3]</sup>。同时,在信噪比太低时,该类算法性能也下降严重。色噪声场里低信噪比条件下的高分辨方位估计算法研究近年受到广泛重视<sup>[4]</sup>。

声纳工作环境噪声可以被看作是由对称和非对称两部分组成。对称噪声场也是一种色噪声场,它是指方位与功率相对接收基阵中心呈统计对称分布的噪声源。通过研究声纳工作噪声场的空间分布特性可知,海洋背景噪声<sup>[5]</sup>、主动声纳产生的混响<sup>[5]</sup>和航行器的螺旋桨噪声<sup>[6]</sup>相对基阵都具有一定的空间对称性,一定程度上可被当作对称噪声源。研究这些对称噪声场中的高分辨方位估计算法对改进声纳工作性能有重要意义。

Farrier<sup>[7]</sup>的研究表明当环境噪声场为对称噪声

收稿日期: 2012-07-14; 修回日期: 2012-10-25

基金项目: 国家自然科学基金(11174235)、西北工业大学科技创新基金。

作者简介: 杜梓冰(1986—),男,陕西人,硕士研究生,研究方向为阵列信号处理、微弱信号检测。

通讯作者: 杜梓冰, E-mail: water060080@gmail.com

场时, 基阵协方差矩阵的虚部仅与非对称信号源有关, 对称噪声分量都在实部中。张大海<sup>[5,8]</sup>等人提出了虚部MUSIC(Image MUSIC, IM)算法, 抑制了对称噪声分量, 相对于传统MUSIC提高了系统对微弱信号的处理能力。但其缺点是其谱是双边谱, 有伪峰, 无法直接得到方位估计。解方程重构信号协方差矩阵MUSIC (Solve Equations Signal Covariance Matrix Reconstruction MUSIC, SRM)算法可以可解决双边谱问题, 但计算量大, 精度也有限<sup>[5,8]</sup>。

理想情况下均匀线列阵接收数据协方差矩阵是 Hermitian 型 Toeplitz 矩阵<sup>[9]</sup>。然而实际应用中, 由于有限采样及阵列误差等造成它只是对角占优的近似 Toeplitz 矩阵, 使得 MUSIC 等利用协方差矩阵分解的子空间算法的 DOA 估计性能下降, 在低信噪比情况下更严重。因此, 有必要对协方差矩阵进行 Toeplitz 修正<sup>[9]</sup>。

本文在深入研究IM和SRM的基础上, 提出一种排序重构协方差矩阵MUSIC(Sort Order Signal Covariance Matrix Reconstruction MUSIC, ORM)算法。首先通过去掉协方差矩阵实部, 达到抑制对称噪声的目的, 然后将IM得到的双边谱角度进行排序, 构造两个阵列流形矩阵, 结合矩阵差分算法<sup>[10]</sup>, 得到目标信号预估角和功率的估计, 接着重构信号协方差矩阵, 再利用其得到MUSIC谱。还研究了协方差矩阵的Toeplitz修正处理对于MUSIC类算法方位估计性能的改善作用。仿真实验表明: ORM可以从方位谱中直接估计到信号方位, 解决了双边谱问题, 相比常规MUSIC算法、IM和SRM算法提高了DOA估计性能, 改善了分辨率, 在低信噪比条件下性能优异。Toeplitz处理修正了协方差矩阵, 改善了各算法的DOA估计性能, 降低了分辨门限。

### 1 对称噪声场阵列信号模型

考虑理想情况下  $M$  元窄带远场阵列模型如图 1 所示。设远场平面波包含  $P$  个目标信号, 满足  $2P < M$ 。环境噪声场为对称噪声场和空间白噪声的

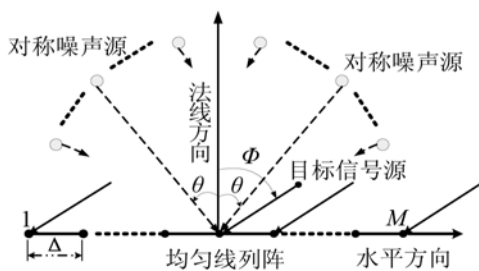


图 1 对称噪声场阵列信号模型  
Fig.1 Array signal model in symmetrical noise field

混合噪声, 各目标信号和噪声之间互不相关。

阵列接收数据在时域中表示为

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{i=1}^P s_i(t)\mathbf{a}(\theta_i) + \mathbf{N}_1(t) + \mathbf{N}_2(t) \quad (1)$$

式中:  $s_i(t)$  表示信号,  $\theta_i$  为信号方向,  $\mathbf{a}(\theta_i)$  为信号导向矢量,  $\mathbf{N}_1(t) = [\mathbf{n}_1(t), \mathbf{n}_2(t), \dots, \mathbf{n}_M(t)]^T$  是功率皆为  $\sigma_n^2$  的空间白噪声,  $\mathbf{N}_2(t)$  为阵列接收到的空间对称噪声。式(1)又可写为矩阵形式:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\mathbf{S}(t) + \mathbf{N}_1(t) + \mathbf{N}_2(t) \quad (2)$$

其中  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_p)]$  为信号阵列流形矩阵,  $\mathbf{S}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_p(t)]^T$  为信号矩阵。得到数据协方差矩阵为

$$\mathbf{R} = E\{\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t)\} = E[\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{S}^H\mathbf{A}^H] + E[\mathbf{N}_1\mathbf{N}_1^H] + E[\mathbf{N}_2\mathbf{N}_2^H] = \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} + \mathbf{Q} \quad (3)$$

式中, 上标“H”表示共轭转置,  $\mathbf{R}_s = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_p^2)$  为期望信号的自相关矩阵,  $\sigma_i^2$  为对应信号源功率,  $\mathbf{Q}$  为空间对称噪声的协方差矩阵, 是实对称矩阵<sup>[7]</sup>。

### 2 解方程重构协方差矩阵 MUSIC 算法

IM 算法通过去掉采样协方差矩阵的实部以消除对称噪声的影响, 达到抑制噪声的目的, 然后仅利用虚部矩阵估计目标方位<sup>[7,8]</sup>。

式(3)协方差矩阵展开为:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sigma_n^2 + \sum_{i=1}^P \sigma_i^2 & \sum_{i=1}^P \sigma_i^2 e^{j\omega_i} & \dots & \sum_{i=1}^P \sigma_i^2 e^{j(M-1)\omega_i} \\ \sum_{i=1}^P \sigma_i^2 e^{-j\omega_i} & \sigma_n^2 + \sum_{i=1}^P \sigma_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^P \sigma_i^2 e^{j(M-2)\omega_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^P \sigma_i^2 e^{-j(M-1)\omega_i} & \sum_{i=1}^P \sigma_i^2 e^{-j(M-2)\omega_i} & \dots & \sigma_n^2 + \sum_{i=1}^P \sigma_i^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

式(4)中  $\omega_i = \pi \sin \theta_i$ , 令  $\mathbf{R}_R$  和  $\mathbf{R}_I$  分别为协方差矩阵的实部和虚部, 即  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_R + j\mathbf{R}_I$ , 由于  $\mathbf{Q}$  为实对称矩阵,  $\mathbf{R}_s$  为对角实矩阵, 根据式(3)求得虚部矩阵为:

$$\mathbf{R}_I = \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{R}^*)}{2j} = \frac{1}{2j} [\mathbf{A}, \mathbf{A}^*] \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & \mathbf{0}_{P \times P} \\ \mathbf{0}_{P \times P} & -\mathbf{R}_s \end{bmatrix} [\mathbf{A}, \mathbf{A}^*]^H \quad (5)$$

由矩阵知识<sup>[11]</sup>可知  $[\mathbf{A}, \mathbf{A}^*]$  和  $\text{diag}(\mathbf{R}_s, -\mathbf{R}_s)$  都是秩为  $2P$  的满秩矩阵, 从而虚部矩阵  $\mathbf{R}_I$  的秩为  $2P$ , 对其进行特征分解得到  $M - 2P$  个零特征值, 对应的特征向量构成噪声子空间  $\mathbf{E}_N$ 。由于  $\mathbf{R}_I$  为实矩阵, 若  $\lambda_i$  和  $\mathbf{V}_i$  为  $\mathbf{R}_I$  的第  $i$  个特征值和特征向量, 就有下式成立:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_I \mathbf{V}_i = \lambda_i \mathbf{V}_i \\ \mathbf{R}_I \mathbf{V}_i^* = (-\lambda_i) \mathbf{V}_i^* \end{cases} \quad (6)$$

即  $-\lambda_l$  也是  $\mathbf{R}_l$  的特征值，同时它们对应的特征向量共轭。所以构成噪声子空间  $\mathbf{E}_N$  的特征向量也是共轭的两部分。

IM 算法<sup>[5,8]</sup>的 MUSIC 谱就表示为

$$P(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{E}_N\mathbf{E}_N^H\mathbf{a}(\theta)} \quad (7)$$

式中  $\mathbf{a}(\theta)$  是均匀线列阵的搜索方向向量。

IM 算法能明显提高系统对微弱信号的 DOA 估计能力<sup>[5,8]</sup>。但是由于特征向量的共轭性质，空间谱中正确方位的对称位置(相对基阵法线方向)会产生一个虚假目标方位，即伪峰，整个方位谱将是  $2P$  个峰的双边谱，无法从方位谱中直观地得出入射信号的真实方位角估计，需要采用其他方法从  $2P$  个双边谱中找到  $P$  个信号的方位角估计，解方程重构协方差矩阵 MUSIC 算法<sup>[5,8]</sup>可以解决该问题。实现过程如下：

取出式(7)所得方位谱中对应右方位的  $P$  个方位角  $\theta_l, l=1, 2, \dots, P$ ，代入式(5)虚部矩阵的第一行，得到  $M-1$  个含有  $P$  个未知数的方程组。求解该线性方程组，可得  $P$  个信号功率估计  $\hat{\sigma}_l^2, l=1, 2, \dots, P$ ，再令  $\sigma_l^2 = |\hat{\sigma}_l^2|$ ，用  $\sigma_l^2$  和  $\theta_l$  构造信号协方差矩阵的实部矩阵：

$$\mathbf{R}_R = (r_{ij})_{i,j=1,2,\dots,M} \quad (8)$$

其中

$$r_{ij} = \sum_{l=1}^P \sigma_l^2 \cos[(j-i)\pi \sin \theta_l] \quad (9)$$

进而重构得到完整的信号协方差矩阵：

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_R + j^* \mathbf{R}_I \quad (10)$$

然后将其用于 MUSIC 算法。这种重构算法由于利用了信号的完整信息，不会出现双边谱。但是需要求解大量线性方程组，计算量大，误差也较大。本文提出另一种排序重构协方差矩阵的 MUSIC 算法。

### 3 排序重构协方差矩阵 MUSIC 算法

$\theta_l$  方向的信号导向矢量为  $\mathbf{a}(\theta_l) = [1, e^{-j\psi \sin \theta_l}, \dots, e^{-j\psi(M-1)\sin \theta_l}]^T$ ， $\psi = 2\pi\Delta/\lambda$ ， $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_p)]$  为阵列流形矩阵，构造以下矩阵：

$$\mathbf{A}^* = [\mathbf{a}^*(\theta_1), \mathbf{a}^*(\theta_2), \dots, \mathbf{a}^*(\theta_p)] = [\mathbf{a}(-\theta_1), \mathbf{a}(-\theta_2), \dots, \mathbf{a}(-\theta_p)] \quad (11)$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}, \mathbf{A}^*] \quad (12)$$

$$\Delta \mathbf{R} = \mathbf{R} - \mathbf{R}^* = \mathbf{A} \mathbf{R}_s \mathbf{A}^H - (\mathbf{A} \mathbf{R}_s \mathbf{A}^H)^* = [\mathbf{A}, \mathbf{A}^*] \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & \mathbf{0}_{P \times P} \\ \mathbf{0}_{P \times P} & -\mathbf{R}_s \end{bmatrix} [\mathbf{A}, \mathbf{A}^*]^H = \mathbf{A} \Delta_s \mathbf{A}^H \quad (13)$$

式中  $\Delta_s = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & \mathbf{0}_{P \times P} \\ \mathbf{0}_{P \times P} & -\mathbf{R}_s \end{bmatrix}$ ， $\mathbf{R}_s = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_p^2)$ ，“\*”表示共轭，“T”表示转置。

“\*”表示共轭，“T”表示转置。

设虚部 MUSIC 算法方位谱中  $2P$  个峰值对应的方位角分别为：

$$\hat{\theta}_1 \ \hat{\theta}_2 \ \dots \ \hat{\theta}_p, -\hat{\theta}_1 \ -\hat{\theta}_2 \ \dots \ -\hat{\theta}_p \quad (14)$$

需要从这  $2P$  个角度中找出  $P$  个入射信号真实方位估计角度  $\theta_1, \dots, \theta_p$ 。现将  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_p, -\hat{\theta}_1, -\hat{\theta}_2, \dots, -\hat{\theta}_p$  进行重新排序，规则是前  $P$  个值中， $\hat{\theta}_l$  和  $-\hat{\theta}_l$  有且只有一个，而后  $P$  个值正好是前  $P$  个值的负值。记排序后的新序列为 ST：

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p, -\varphi_1, -\varphi_2, \dots, -\varphi_p \quad (15)$$

构造对应的阵列流形矩阵如下：

$$\mathbf{A}_{12} = [\mathbf{a}(\varphi_1), \mathbf{a}(\varphi_2), \dots, \mathbf{a}(\varphi_p), \mathbf{a}(-\varphi_1), \mathbf{a}(-\varphi_2), \dots, \mathbf{a}(-\varphi_p)] = [\mathbf{a}(\varphi_1), \mathbf{a}(\varphi_2), \dots, \mathbf{a}(\varphi_p), \mathbf{a}^*(\varphi_1), \mathbf{a}^*(\varphi_2), \dots, \mathbf{a}^*(\varphi_p)] \quad (16)$$

令  $\mathbf{I}$  表示一对应的置换矩阵<sup>[11]</sup>，它使下式成立：

$$\mathbf{A}_{12} = \mathbf{A} \mathbf{I} \quad (17)$$

其主要性质是  $\mathbf{I} \mathbf{I}^T = \mathbf{I}^T \mathbf{I} = \mathbf{E}$ 。

构造矩阵

$$\mathbf{R}_{12} = (\mathbf{A}_{12}^H \mathbf{A}_{12})^{-1} \mathbf{A}_{12}^H \Delta \mathbf{R} \mathbf{A}_{12} (\mathbf{A}_{12}^H \mathbf{A}_{12})^{-1} \quad (18)$$

由文献[11]，将上式化简后得

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{I}^T \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{R}_s \end{bmatrix} \mathbf{I} \quad (19)$$

显然，当 ST 排序正确时，即  $\varphi_1 = \theta_1, \varphi_2 = \theta_2, \varphi_p = \theta_p$  时，有  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}, \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}^*, \mathbf{A}_{12} = [\mathbf{A}, \mathbf{A}^*], \mathbf{I} = \mathbf{E}$ ，从而有：

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{E} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{R}_s \end{bmatrix} \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{R}_s \end{bmatrix} \quad (20)$$

$\mathbf{R}_{12}$  是块对角矩阵，且对角线前  $P$  个元素为正，是对应  $P$  个信号功率的估计，后  $P$  个对角元素为负。当排序不正确时，由置换矩阵的性质可知  $\mathbf{I}^T$  也是置换矩阵，式(19)表示先对  $\text{diag}(\mathbf{R}_s, -\mathbf{R}_s)$  进行一次行变换，再进行一次列变换，其结果是  $\mathbf{R}_{12}$  依然是对角矩阵，只是对角线每个值的位置发生变化。而正值是信号功率  $\hat{\sigma}_i^2 (i=1, 2, \dots, P)$  的估计，其位置与序列 ST 中正确信号方位的位置一一对应。这样就可以直接找到信号方位的预估值和功率的估计。

利用得到的信号方位角预估值和功率的估计，根据式(8)和式(9)重构信号协方差矩阵实部，然后根据式(5)和式(10)重构到完整信号协方差矩阵，再进行特征分解，划分子空间，得到 MUSIC 谱。

该算法去掉协方差矩阵的实部，抑制了对称噪声的影响；重构信号协方差矩阵实部，充分利用了信号信息，不会出现双边谱问题，同时也使信号得

到增强；算法实现简单，没有求解大量方程组，计算量小，误差较小。

### 4 Toeplitz 修正处理

理想的均匀线列阵数据协方差矩阵  $\mathbf{R}$  是形式如下的 Hermitian 型的 Toeplitz 矩阵<sup>[9]</sup>：

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_i & r_M \\ r_1^* & r_0 & r_1 & r_i \\ r_i^* & r_1^* & r_0 & r_1 \\ r_M^* & r_i^* & r_1^* & r_0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$\mathbf{R}$  中位于任一平行于主对角线的直线上的元素全相同， $\mathbf{R}$  与其共轭转置矩阵相等。

实际应用中，协方差矩阵是在有限次采样条件下对接收数据做时间上的统计平均构成的，并且各个阵元不可能完全相同，噪声形式也复杂，这些因素导致协方差矩阵只是近似 Toeplitz 矩阵，对其进行特征分解后，信号子空间和噪声子空间划分不明确，导致 MUSIC 等子空间的 DOA 估计性能下降，这种情况在低信噪比时变得更加严重。为提高算法性能，对协方差矩阵进行 Toeplitz 修正，使其更接近理想情况。

本文采用对数据协方差矩阵  $\mathbf{R}$  的斜对角线上的元素进行平均的 Toeplitz 处理<sup>[9]</sup>。设处理后的协方差矩阵用  $\tilde{\mathbf{R}}$  表示， $r_{mn}$  和  $\tilde{r}_{mn}$  分别为  $\mathbf{R}$  及  $\tilde{\mathbf{R}}$  的第  $m$  行、第  $n$  列的元素，Toeplitz 修正处理过程如下：

$$\begin{cases} \tilde{r}_{mn} = \tilde{r}(m-n) = \tilde{r}(k) = \frac{1}{M-k} \sum_{i=1}^{M-k} r_{i,i+k}, & n \geq m \\ \tilde{r}_{mn} = \tilde{r}^*(m-n) = \tilde{r}^*(-k) = \tilde{r}_{mn}^*, & n < m \end{cases} \quad (22)$$

这里， $M$  为协方差矩阵的行数， $k = m - n$ 。

MUSIC 等利用协方差矩阵的算法即可采用  $\tilde{\mathbf{R}}$  进行操作，提高性能。

### 5 仿真实验与分析

为验证理论分析，对比各算法性能，进行 matlab 仿真实验。实验中，设某信号功率为  $\sigma_s^2$ ，对称噪声总功率为  $\sigma_{N1}^2$ ，空间白噪声功率为  $\sigma_{N2}^2$ ，信噪比(Signal to Noise Ratio, SNR)定义如下：

$$SNR = 10 \lg \left[ \frac{\sigma_s^2}{\sigma_{N1}^2 + \sigma_{N2}^2} \right] \quad (23)$$

各仿真实验基本条件为：20 元均匀线列阵，阵元各向同性，阵元间距为半波长，定义基阵法线方向为  $0^\circ$ 。两个窄带信号入射，快拍数为 1000，方向为  $3^\circ$  和  $7^\circ$ ，中心频率为 1500Hz。环境噪声场包括

局部对称噪声场和空间白噪声，信号、噪声互不相关。对称噪声产生过程如下：在空间  $-60^\circ, -58^\circ, -56^\circ, \dots, -2^\circ, 2^\circ, \dots, 56^\circ, 58^\circ, 60^\circ$  方位上放置 60 个互不相关、与信号源也不相关的窄带噪声源，噪声源中心频率与信号中心频率相同，每个噪声源功率满足  $\cos^4 \theta$  分布， $\theta$  为噪声源方位，得到对称噪声场幅度-方位分布如图 2 所示。

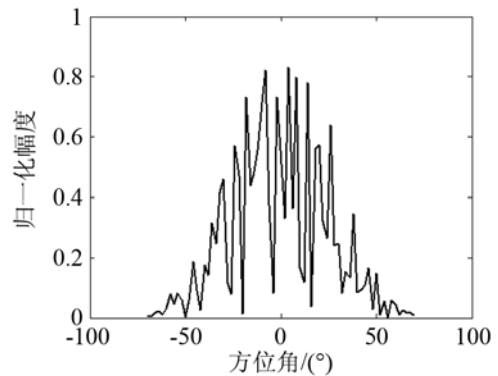


Fig.2 Amplitude-azimuth distribution of symmetrical noise field

由图 2 可知，局部对称噪声场基本满足对称条件。在上述条件下进行不同仿真实验，研究协方差矩阵未进行 Toeplitz 修正的常规 MUSIC(M)、IM、SRM 和本文 ORM 算法，以及协方差矩阵经 Toeplitz 处理后各算法(TM、TIM、TSRM、TORM)的性能。

#### 仿真 1：考察方位谱

保持基本条件不变，在不同信噪比条件下考察各算法方位谱，结果为图 3 所示。

图 3(a)中，当 SNR 都为 4dB 时，未经 Toeplitz 修正处理的四算法都可以估计到两信号方位，而 IM、SRM 和 ORM 的谱背景幅度和波谷明显比 M 法的低，方位分辨性能依次变好，这是因为去掉协方差矩阵的实部抑制了对称噪声分量。两重构算法无双边谱，这是由于重构信号协方差矩阵充分利用了信号信息，矩阵分解后不会得到共轭特征向量，而且重构信号矩阵使信号得到增强，所以谱背景幅度相比 IM 进一步降低。将 SNR 降低到 -24dB，此时信号已经完全淹没在噪声中，各算法的方位谱图如图 3(c)所示。图中，M 算法只有一个峰，IM 算法里  $3^\circ$  方向的峰不明显，SRM 只有一个峰位置正确，都无法估计目标方位，只有 ORM 算法能正确估计到目标方位角，分辨性能好。试验说明 ORM 算法相比其他三算法可应用于更低信噪比环境下。

图 3(b)是 SNR 为 4dB 时经过 Toeplitz 修正处理后的方位谱图。相比图 3(a)，各算法谱曲线幅度大大降低，波谷更低，分辨性能更好。图 3(c)中只有 ORM 算法可以分辨信号，而经过 Toeplitz 处理后图

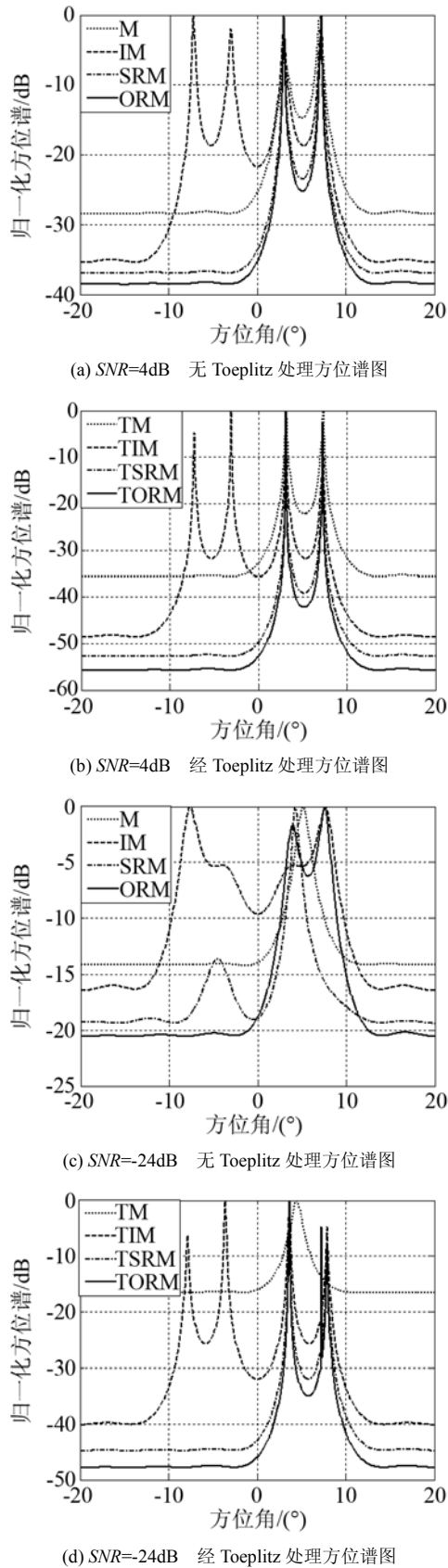


图 3 不同信噪比下的方位谱图  
Fig.3 Azimuth spectrum versus different SNR

3(d)中除 M 算法外都可成功分辨信号,背景谱幅度大幅下降,ORM 的波谷降低了将近 30dB,分辨性

能更好。这是因为 Toeplitz 处理使协方差矩阵更接近理想情况,特征分解后,信号子空间和噪声子空间划分更理想。实验说明对协方差矩阵进行 Toeplitz 处理能有效改善各算法 DOA 估计和分辨性能。

仿真 2: 考察分辨率

保持基本条件不变,针对不同信噪比,分别应用各算法对同样的数据进行处理,各进行 100 次独立的蒙特卡洛实验,考察各算法在不同信噪比条件下的 DOA 分辨率。本文规定,某次实验中,若两信号源的方位估计角  $\hat{\theta}_1$ 、 $\hat{\theta}_2$  和真实角  $\theta_1$ 、 $\theta_2$  满足

$$|\hat{\theta}_1 - \theta_1| + |\hat{\theta}_2 - \theta_2| < |\theta_1 - \theta_2| \quad (24)$$

则称本次实验中两信号源正确分辨。分辨率定义为正确分辨次数占实验总次数的比值。图 4 给出了各算法的分辨率。

从图 4 可以看出,各算法分辨率都是随信噪比下降而下降。同信噪比下, M、IM、SRM 和 ORM 分辨率依次提高, Toeplitz 处理提高了各算法分辨率, ORM 和 TORM 在低信噪比条件下有最优的分辨性能。若把分辨率首次达到 1 时对应的信噪比称作分辨门限,则 M、IM、SRM 和 ORM 的分辨门限分别为 -5dB、-18dB、-20dB 和 -22dB, ORM 算法的分辨门限低于其他各算法。TM、TIM、TSRM 和 TORM 的分辨门限为 -16dB、-24dB、-24dB 和 -26dB。由结果可知, Toeplitz 修正处理明显提高了各算法分辨率,降低了分辨门限,证明了该处理对 MUSIC 类算法分辨性能有很好的改善作用。

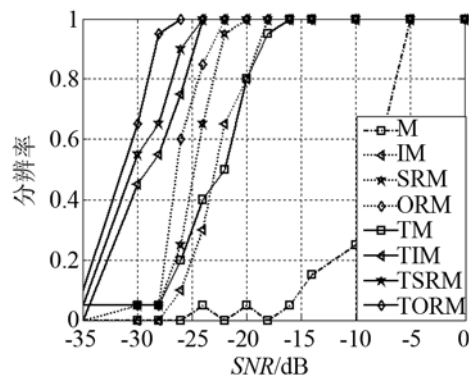


图 4 不同信噪比下分辨率  
Fig.4 Resolution versus different SNR

### 6 结论

在空间方向性对称噪声场里,利用协方差矩阵的虚部与对称噪声源无关的性质,本文提出一种高分辨方位估计的 ORM 算法,并研究协方差矩阵进行 Toeplitz 修正对 MUSIC 类算法性能的改善效果。由理论分析和仿真实验得到以下结论:

(1) ORM 算法相比 M 算法成功抑制了对称噪声,降低了噪声的影响;相比 IM 算法,充分利用了信号信息,增强了信号强度,解决了双边谱问题;相比 SRM 算法,计算量小,信号协方差矩阵重构精度更高。所以 ORM 算法的 DOA 估计和分辨性能比上述三算法更佳,能处理更低信噪比信号。

(2) Toeplitz 处理成功修正了协方差矩阵,能有效改善 MUSIC 类算法分辨性能,特别是低信噪比下。

(3) 将 Toeplitz 修正处理与 ORM 算法结合的 TORM 算法是一种高分辨 MUSIC 算法,分辨性能好,可处理低信噪比的信号。

(4) 由于海洋环境噪声、主动声纳混响等噪声相对于基阵存在一定对称性,本文提出的方法对于在这些对称噪声环境中进行高分辨方位估计将有一定的参考价值。但具体实现还有很多的研究工作要做。

#### 参 考 文 献

- [1] Michael Rubsamén, Alex B Gershman. Direction of arrival estimation for nonuniform sensor arrays: From manifold separation to fourier domain MUSIC methods[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(2): 588-599.
- [2] Helen M Walkinshaw. Measurements of ambient noise spectra in the South Norwegian Sea[J]. IEEE Journal of Oceanic Engineering, 2005, 30(2): 262-266.
- [3] 衣雪娟, 林建恒, 殷宝友. 斜坡海底海洋环境噪声垂直指向性研究[J]. 声学技术, 2008, 27(4): 511-515.  
YI Xuejuan, LIN Jianheng, YIN Baoyou. Vertical directionality of ambient noise in the slope-bottom sea[J]. Technical Acoustics, 2008, 27(4): 511-515.
- [4] Michael L McCloud, Louis I.Scharf. A new subspace identification algorithm for high-resolution DOA estimation[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2002, 50(10): 1382-1390.
- [5] ZHANG Dahai, MA Yuanliang, YANG Kunde. Weak signal detection method based on sector spatial pre-filtering[C]// 2008 Congress on Image and Signal Processing. San Ya, China. 2008; May, 27-30, 552-556.
- [6] 谢剑波, 周其斗. 非均匀流场中螺旋桨线谱噪声指向性分析[J]. 中国舰船研究, 2010, 5(6): 6-11.  
XIE Jianbo, ZHOU Qidou. Directivity prediction on tone noise of propeller operation in non-uniform flows[J]. Chinese Ship Research, 2010, 5(6): 6-11.
- [7] Farrier D R, Jeffries D J. Bearing estimation in the presence of unknown correlated noise[C]// Processing of international conference on acoustics, Speech, and Signal Processing. Tampa, Florida, USA. 1985; March, 26-29, 1788-1791.
- [8] 张大海, 杨坤德. 基于扇区空域预滤波的方位估计新方法[J]. 电声技术, 2008, 32(11): 30-34.  
ZHANG Dahai, YANG Kunde. A new DOA method based on sector spatial prefiltering[J]. Audio Engineering, 2008, 32(11): 30-34.
- [9] LI Donghai, DONG Chunli, HUANG Jie. A study on the application of Toeplitz approximation method on DOA estimation[C]// 2010 2nd International Conference on Signal Processing Systems (ICSPS). Da Lian, China. 2010 July 5-7, 3(215-218).
- [10] QI Chongying, WANG Yongliang, ZHANG Yongshun, et al. Spatial difference smoothing for DOA estimation of coherent signals[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2005, 12(11): 800-802.
- [11] 程云鹏, 张凯院, 徐仲. 矩阵论[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2006.  
CHENG Yunpeng, ZHANG Kaiyuan, XU Zhong. Matrix theory[M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 2006.