

# 随机数列在声散射体设计中的应用

古林强, 陈立新

(广州大学建筑与城市规划学院, 广州 510006)

**摘要:** 利用声散射理论与随机信号处理理论的相似性, 通过对随机过程的理论分析, 阐明了声扩散体设计的本质在于其表面阻抗变化的随机性, 在更一般的层面上解析了目前各种各样的设计方法。数值分析表明, 即使运用古代易经理论产生一个随机序列, 亦可制作成散射性能良好的扩散体。因为通讯技术的迅猛发展, 随机序列的研究获得长足进步, 借鉴这些领域的成熟研究成果, 可为声学扩散体进一步的优化设计提供广阔的设计思路和必要的理论支持。

**关键词:** 声散射; 扩散体; 随机过程, 声扩散

中图分类号: TB566

文献标识码: A

文章编号: 1000-3630(2013)-05-0406-05

DOI 编码: 10.3969/j.issn1000-3630.2013.05.010

## Application of random sequence in diffuser design

GU Lin-qiang, CHEN Li-xin

(Department of Architecture and Urban Planning, Guangzhou University, Guangzhou 510006)

**Abstract:** Making use of the similarity between the theory of sound diffusion and random signal processing, a theoretical analysis of random process is conducted to strictly prove that the essence of designing sound diffuser is the randomness of impedance along its surface. A more general and clearer explanation to design technique of sound diffuser is achieved. Numerical analysis shows that even using the ancient I-Ching theory can generate a random sequence, which can be applied to diffuser design. Because of the rapid development of communication technology, the studies of random sequence have made considerable progress. Learning from these mature achievements, a wide range of design ideas and the necessary theoretical support for further optimization of the acoustic diffuser design can be obtained.

**Key words:** sound scattering; diffuser; random process; sound diffusion

## 0 引言

有关室内音质声扩散问题的大量研究与工程应用可追溯到上个世纪 70 和 80 年代, 与之相关的声扩散体设计及应用得到越来越多的重视, 有文献对过去的研究进行了总结<sup>[1]</sup>。一般认为扩散体有两种类型, 分别是“幅度栅”及“相位栅”扩散体<sup>[2]</sup>。本文通过对随机过程的理论分析, 指出两种扩散体设计的核心要素在于其表面阻抗内在的随机性, 从理论上清晰地解析了反射系数的随机性对于声扩散的内在作用, 从而在更一般的层面上概括了目前的种种设计方案。

## 1 散射理论与信号处理理论的相似性

声学界面声反射的理论基础是惠更斯原理。该

原理假设开始波阵面上的每一点可以看作次级声源, 它们发射出子波, 这些子波叠加后得到向前传播的声波<sup>[3]</sup>。如果考虑该界面为局部反应表面及远场接收条件, 与光学中的夫琅和费衍射相类似<sup>[4]</sup>, 在一维的情况下, 界面外一点接收到的声压大小遵循以下规律<sup>[5]</sup>:

$$P(\alpha) = \int r(x) \exp[2\pi jx(\sin \alpha - \sin \alpha_i) / \lambda] dx \quad (1)$$

其中:  $\alpha$  为接收点偏离界面外法线的角度;  $\alpha_i$  为声波的入射角度;  $r(x)$  为  $x$  处的反射系数;  $\lambda$  为入射波的波长, 如图 1 所示。

在最一般情况下, 考虑积分的区间是  $(-\infty, \infty)$ ,

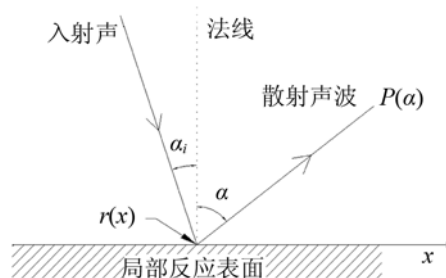


图 1 局部反应表面的声散射分析模型  
Fig.1 Analytical model of scattering from local-reacting surface

收稿日期: 2013-05-13; 修回日期: 2013-08-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51008086)

作者简介: 古林强(1980—), 男, 广东茂名, 讲师, 研究方向为建筑声学。

通讯作者: 古林强, E-mail: gulinqiang@gmail.com

作变量替换, 令  $k=2\pi(\sin \alpha-\sin \alpha_i)/\lambda$ ,  $P(\alpha)=A(k)$ , 则有

$$A(k)=\int_{-\infty}^{\infty} r(x) \exp(jkx) dx \quad (2)$$

显然, 在一定的入射条件下, 因为  $k$  为  $\alpha$  的函数, 所以只要  $A(k)$  的值确定, 那么界面外一点接收到的声压随散射角  $\alpha$  变化的情况就可确定了。观察式(2)可知,  $A(k)$  即为反射系数  $r(x)$  的傅里叶变换。

如果从信号处理的角度来看, 考虑  $r(x)$  由一个广义平稳的随机过程产生, 是一般的复值随机连续信号, 其功率谱密度  $S(f)$  既可以通过自相关得到, 也可以直接通过信号本身的频谱得到(如果  $r(x)$  为功率信号, 则需要先开窗再求频谱)。定义  $r(x)$  的自相关函数为  $R(\tau)$ , 则

$$S(f)=\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \quad (3)$$

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} S(f) \exp(j2\pi f\tau) df \quad (4)$$

连续幅度信号  $r(x)$  的功率谱密度  $S(f)$  与开窗后的信号频率  $r_T(f)$  之间的一个直接联系可以通过维纳-辛钦法则<sup>[4]</sup>来计算。为此, 可以将信号的自相关函数重写为

$$R(\tau)=\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} r(x)r^*(x+\tau) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [r_T(x) \triangleright r_T(x)] \quad (5)$$

式(5)中符号  $r^*(x+\tau)$  表示  $r(x+\tau)$  的共轭, 而符号  $\triangleright$  表示相关, 则

$$r_T(x) \triangleright r_T(x) = \int_{-T/2}^{T/2} r_T(x)r^*(x+\tau) dx \quad (6)$$

信号  $r_T(x)$  指的是开窗截取  $r(x)$  在  $[-T/2, T/2]$  之间的部分, 将维纳-辛钦法则应用到式(6), 则可以得到

$$S(f)=\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |r_T(f)|^2 \quad (7)$$

至此, 联系到  $|P(\alpha)|^2 = |A(k)|^2 = S(f)$ , 则可以认为单位时间内在特定散射角  $\alpha$  上分布的声能量为反射系数  $r(x)$  自相关的傅里叶变换。如果  $r(x)$  的自相关为一个冲激函数, 那么声能量是连续均匀散射的。上述结论也可以方便地推导到  $r(x)$  为周期信号或者是周期性离散序列的情况, 只是这种条件下, 求自相关只需要在一个周期内完成, 这样得到的  $R(\tau)$  是与信号本身同周期的, 功率频谱相应地变为线状谱, 这意味着散射能量将集中在某些角度。

## 2 理想随机函数与均匀散射的关系

已知任何局部反应表面的反射系数都可写为

$r(x)=|r(x)| \exp[j\varphi(x)]$ , 讨论最一般的情况, 认为  $r(x)$  是随机过程的一个样本, 服从某种概率分布。为简单起见, 可把反射系数分为两种类型, 一种是先令  $|r(x)|$  为一常数  $A$ , 而  $\varphi(x)$  为一随机变量, 考虑到相位的主值范围是  $[-\pi, \pi]$ , 不失一般性, 可以假定  $\varphi(x)$  服从均匀分布, 服从其他分布的情况也可以类推。第二种是先令  $\varphi(x)$  为常数,  $|r(x)|$  为随机变量, 这时  $x \in (-\infty, \infty)$ , 可以假定  $r(x)$  服从正态分布, 同样, 服从其他分布的情况可以类推, 先讨论第一种情况。与随机变量  $r(x)$  对应的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & -\pi \leq x \leq \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases} \quad (8)$$

另考虑到  $r(x)=A \exp[j\varphi(x)]=A \exp(jX)$  是随机变量  $X$  的函数, 且对于  $x$  单调可微, 记  $y=r(x)$ , 那么存在有限区间  $[a, b]$ , 使得  $x=r^{-1}(y)$ , 其中  $a=\min\{r(x)\}$ ,  $b=\max\{r(x)\}$ ,  $y=r(x)$  的概率密度函数可以由式(9)求得:

$$f(y)=f[r^{-1}(y)] \left| \frac{d}{dy} [r^{-1}(y)] \right| I_{(a,b)}(y)$$

$$\text{其中 } I_{(a,b)}(y)=\begin{cases} 1, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (9)$$

可以看出  $r(x)$  也是一个随机变量, 且是一个复随机变量, 由式(5)、(8)、(9)可得

$$R(\tau)=E\{r(x)r^*(x+\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} A \exp[jx] f(x) \cdot A \exp[-j(x+\tau)] d\tau = \frac{A^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[-j\tau] d\tau = A^2 \delta(\tau) \quad (10)$$

式中  $E$  表示数学期望。而当  $\tau=0$  时,  $\delta(\tau)=1$ ; 当  $\tau \neq 0$  时,  $\delta(\tau)=0$ , 则  $R(\tau)$  可以看成是一冲激信号。对其进行傅里叶变换可知其功率谱函数  $S(f)$  为一常量。

以上讨论严格地证明了一个观点: 在模不变的情况下, 如果散射界面各处的反射系数的相位函数  $\varphi(x)$  满足随机分布, 那么由该界面散射的声能量在各个角度就是相等的, 这正是设计“相栅”扩散体的本质所在。

讨论第二种情况。简单起见, 设  $|r(x)|$  为随机变量  $X$ , 满足  $X \sim N(0, 1)$ , 即满足标准正态分布。事实上一般的正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$  的分布函数的值的计算都可以通过变量代换转化为标准正态函数值的计算。  $X$  的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad -\infty < x < \infty \quad (11)$$

与第一种情况分析相类似, 综合式(5)、(9)、(11)

得

$$R(\tau) = E \{ r(x)r^*(x+\tau) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(jB)x(x+\tau)f(x)\exp[-jB]dx d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} x(x+\tau)\exp(-\frac{x^2}{2})dx d\tau = \frac{1}{4\pi^2} \delta(\tau) \quad (12)$$

其中  $E, \delta(\tau)$  含义与第一种情况一样。对其进行傅里叶变换可知其功率谱函数  $S(f)$  为一常量。这次讨论同样严格地证明了：在相位不变的情况下，如果散射界面各处的反射系数的模函数  $|r(x)|$  满足随机分布，那么由该界面散射的声能量在各个角度就是相等的——对应于“幅度栅”扩散体的设计思想。

综合上述，本文在最一般的情况下严格证明了理想的随机性与均匀散射的对应关系。

### 3 设计实例分析

作为验证表面阻抗变化随机性与声散射之间的联系，本文基于随机理论生成一个扩散体，并且通过数值的方法比较实例扩散体与光滑平面的扩散系数。为了说明上述理论的普遍性，本文的随机数以《易传》里面提到的一个技巧来产生，目的在于说明不管用什么方法产生序列，只要是伪随机的，自相关图形接近脉冲形式的，就可以据此生成扩散体。《易传》里提到产生随机数的若干种方法，可以认为是信息科学的起源与基础<sup>[6]</sup>，简单介绍如下：

《易经》由六十四卦和与之相关的解释所组成，《易传》通过一系列步骤使卜卦者最终获得一至两卦。每卦可有六爻(六行由两段虚线或实线组成的图形)，每一爻可能出现两个符号之一(见图 2)，这两个符号称为阴爻和阳爻，在数学上可以表示成-1 与 1(按照莱布尼兹根据八卦发明计算机两进制，而两进制是用 0 与 1 来描述十进制的，用 0 和 1 来设计的扩散体又称为“幅度栅”，但根据文献[5]，也可以用-1 和 1 形成“相位栅”)。因为六爻中每一行都可以是阴爻或阳爻，所以总共有 64 个不同的组成。图 2 中：第一行出现两种方式，是“两仪”，前两行出现四种方式，为“四象”，前三行出现  $2 \times 2 \times 2 = 8$  种方式，即“八卦”。如此继续可得到  $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$  种方式为止。故《系辞》有“是故易有太极，是生两仪，两仪生四象，四象生八卦”之说。

用《易传》产生随机数的精妙之处涉及到一种方法：《大衍之数》。用五十根蓍草秆；另有《钱筮



图 2 《易经》中的爻<sup>[7]</sup>  
Fig.2 Trigram from the I-Ching

法》又叫《火珠林法》，因为它求阴爻、阳爻的方法是用三枚硬币。在《大衍之数》中，把五十根秆中的一根放在一边，永不使用，即《系辞》“大衍之数五十，其用四十九”。接着随机地把四十九根蓍草秆分成两堆。把左边那堆按四计数，记下余数；从右边那堆拿走一根后，进行同样的运作，把两次的剩余数相加求和后得一个值。对非剩余的草秆第二次实施整个过程，然后第三次。三个数值相加，最终的和数根据其奇偶性产生或阴爻或阳爻，占据该卦的一爻。这个程序重复六次便得一个完整的卦，虽然这个对剩余求和的方法很奇怪，但带来的结果——出现阴阳爻的机会是相等的。而在《钱筮法》中，三枚中间有孔，一面刻字的古代铜钱同时掷下，根据几个刻字面向上而产生卦中的一爻，这个程序重复六次。为什么采取这种高度复杂的规则来得到简单的阴爻和阳爻，古人始终没有讲清楚，且这个问题现在仍在探讨中，但就其结果来说，得到的序列是高度不相关的，也就是说满足伪随机序列的要求<sup>[8]</sup>。上面点蓍草秆的过程可以利用计算机来模拟，具体实现的步骤如下：

- (1) 产生不大于 49 的伪随机数作为左边的数目  $a_1$ ，所用函数是 RAND；
- (2) 右边的数目  $b_1 = 49 - a_1$ ；
- (3) 左边的数目被 4 除求余，即得新数  $a_2 = \text{mod}(a_1, 4)$ ；
- (4) 右边数目减 1，然后被 4 除求余，即得新数  $b_2 = \text{mod}(b_1 - 1, 4)$ ；
- (5) 步骤(3)、(4)的余数相加得到一个和  $c_1 = a_2 + b_2$ ；
- (6) 用 49 减去步骤(5)的数目，得到一个数  $a_3 = 49 - c_1$ ；
- (7) 产生一个不大于  $a_3$  的伪随机数作为左边的数目，重复步骤(2)到(5)，得到一个和  $c_2$ ；
- (8) 用步骤(6)的数目减去步骤(7)的数目，得到一个新数  $a_4$ ；

(9) 产生一个不大于  $a_4$  的伪随机数当左边的数目，重复步骤(2)到(5)，得到一个和  $c_3$ ；

(10) 令  $d=c_1+c_2+c_3$ ，如果是偶数，那么序列  $x(1)$  赋值 1，如果是奇数， $x(1)$  赋值为 -1；

(11) 重复步骤(1)到(10)，得到序列  $x$  的其他值。

作为例子，严格按照第一种方法可以生成的 31 位伪随机序列如下：

++-+-+---+---++-----+-+---+-+---++

此序列的散点图及相应的自相关序列散点图如图 3(a)及图 3(b)所示(散点本身没有任何物理意义，只用于表达数值上的大小)，可以看到尽管生成序列的方法有点奇异，但得到的序列的自相关却是令人满意的。

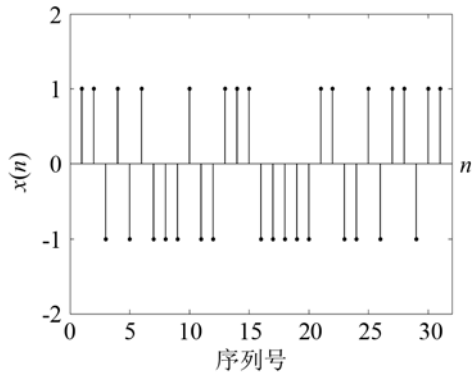


图 3(a) 序列散点图  
Fig.3(a) Scatter diagram of sequence

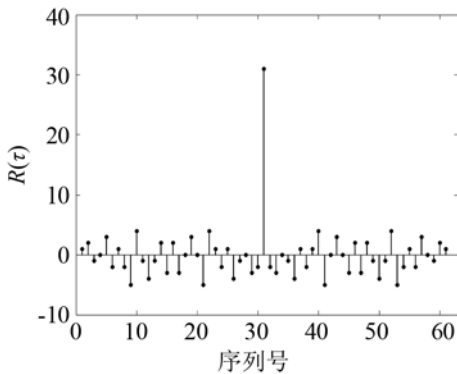


图 3(b) 序列自相关散点图  
Fig.3(b) Scatter diagram of the autocorrelation of sequence

因为在声学上实现 -1 的反射系数并不难，只要能让声波的声程差为  $\lambda/2$  即可，也就是说让凹槽的深度为设计频率的  $\lambda/4$ 。据此序列生成一个凹槽深度为 200mm 的扩散体结构(设计频率为 430Hz 左右)如图 4(a)、4(b)所示。

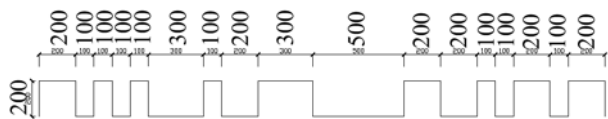


图 4(a) 扩散体尺寸示意图(单位: mm)  
Fig.4(a) Dimensions of the diffuser (unit: mm)

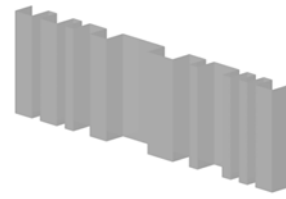


图 4(b) 扩散体立体示意图  
Fig.4(b) 3D model of the diffuser

需要强调，虽然本例类似常见的 MLS 扩散体，但产生序列的方法是完全不一样的。因为利用边界元法预测扩散体的扩散系数已经被证明与实验的结果比较协调，结果是可靠的<sup>[9]</sup>，在设计的有效频率范围内，用边界元法预测了实例扩散体的扩散性能，数值预测其散射声场的极响应图如图 5 至图 8 所示，计算极响应时采用平面波正入射的情况，因为扩散体尺寸比较大，接收点离扩散体距离设置为 10m。因为计算扩散系数时仅仅需要知道各角度散射声压的相对值，为了便于比较，其中幅度也采取了归一化处理。

本计算实例的设计频率为 430Hz，考虑扩散体在 430Hz、860Hz、1290Hz、1720Hz 时的极响应图及相应同尺寸参考平板在同频率下的极响应图，如图 5 与图 6 所示。

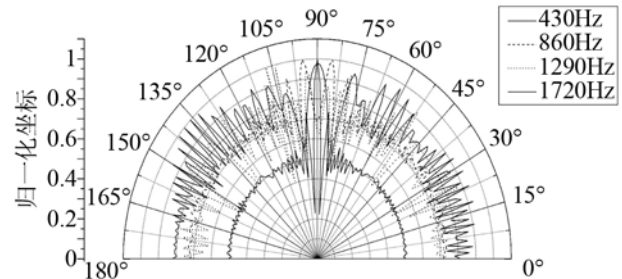


图 5 扩散体在不同频率下的散射场极响应图  
Fig.5 Polar response of diffuser at different frequencies

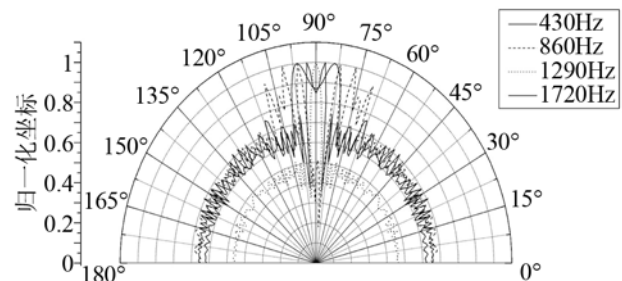


图 6 参考平板在不同频率下的散射场极响应图  
Fig.6 Polar response of reference plate at different frequencies

从图 5 可以看到，扩散体在能起作用的 430Hz 及 1290Hz 频率上均起到很好的扩散作用，极响应图比较均匀。而在 860Hz 及 1720Hz 时，扩散体散射场的极响应图看起来与平板的极响应图相差不多。把两者的极响应图放在相同的频率下比较，如

图 7 至图 10 所示。

根据扩散体设计的理论,这类凹槽深度为常数的扩散体在设计频率的偶数倍时,如频率在 860Hz 及 1720Hz 时,由于这时声程差为  $\lambda$ ,扩散体凹槽并没有产生任何相位差,所以这个频率下扩散体的表现与参考平板是差不多的,如图 7 与图 8 所示,两者的散射能量局限在  $70^\circ$  至  $100^\circ$  的范围里,其实就是镜面反射;而在奇数倍的频率上,例如 430Hz 及 1290Hz 时,散射的效果达到最好的状态,相比

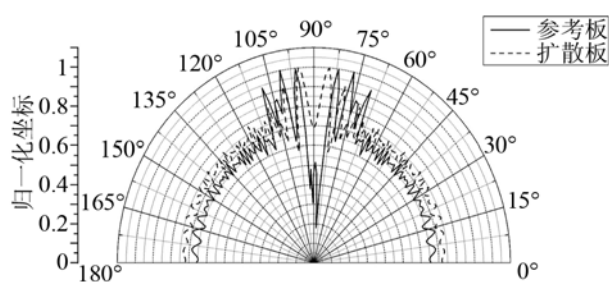


图 7 860Hz 扩散体与参考平板的散射场极响应图  
Fig.7 Polar response at 860Hz

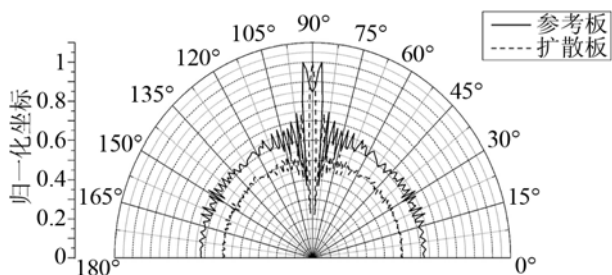


图 8 1720Hz 扩散体与参考平板的散射场极响应图  
Fig.8 Polar response at 1720Hz

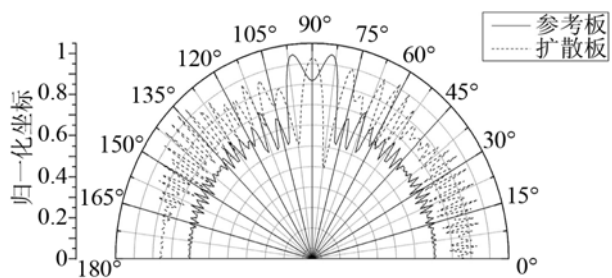


图 9 430Hz 扩散体与参考平板的散射场极响应图  
Fig.9 Polar response at 430Hz

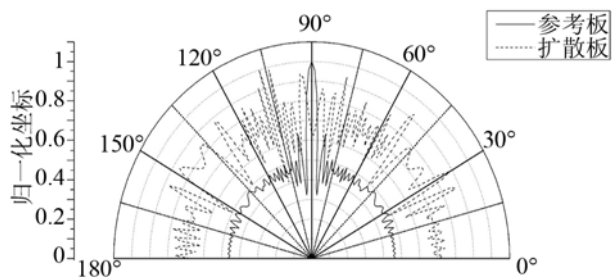


图 10 1290Hz 扩散体与参考平板的散射场极响应图  
Fig.10 Polar response at 1290Hz

参考平板的极响应图会更加均匀,在图 9 与图 10 中较直观地表示出来,散射能量几乎在  $0^\circ$  至  $180^\circ$  比较均匀地分布,产生很多扩散瓣,所以说这些结果都比较符合理论的解释。

## 4 结 论

利用声散射和随机信号处理的相似性,在随机过程的框架内,在理论上分析了满足均匀声散射的必要条件,从根本上解释了均匀声散射是由于反射系数的内在随机性造成的,从而把现有的设计理论统一到一个框架内。不管是“相栅”还是“幅度栅”扩散体,本质上就是在扩散体的表面构造一个伪随机排列的阻抗,使得反射系数呈随机性变化。对于形成伪随机的相位分布的情况,目前的设计方法大多数是利用凹凸不平的同质表面,凹凸程度由数论生成的序列确定,其实只要是序列本身具有随机性,例如通过抛硬币的过程产生序列来确定其深度也行,只不过是没数论产生来得那么严谨而已。数值分析表明,即使运用古代易经理论产生一个随机序列,亦可制作成散射性能良好的扩散体。因为通讯技术的迅猛发展,随机序列的研究获得了长足的进步,借鉴这些领域的成熟研究成果,可为声学扩散体进一步的优化设计提供广阔的设计思路和必要的理论支持。

## 参 考 文 献

- [1] Peter D'Antonio, Cox T J. Diffusor application in rooms[J]. Applied Acoustics, 2000(60): 113-142.
- [2] Cox T J, Angus J A S, Peter D'Antonio. Ternary and quadricphase sequence diffusers[J]. J. Acoust. Soc. Am., 2006, 19(1): 310-319.
- [3] 侯玉敏, 毛卫宁. 刚性曲面障板散射对多球形水听器测向的影响[J]. 声学技术, 2005, 24(2): 94-97.
- [4] 时胜国, 杨德森. 弹性球壳声散射对矢量水听器测向影响研究[J]. 声学技术, 2008, 27(5): 642-648.
- [5] Cox T J, Peter D'Antonio. Acoustic absorbers and diffusers: Theory, design and application[M]. Taylor&Francis, London, 2004: 240-241.
- [6] Bennett D J. 随机性[M]. 严子谦, 严磊 译, 长春: 吉林人民出版社, 2004: 30-31.  
Bennett D J. Randomness[M]. Changchun: Jilin people's publishing house, 2004: 30-31.
- [7] Hans-Jurgen Zepernick, Adolf Filger. 伪随机信号处理——理论与应用[M]. 甘良才等译, 北京: 电子工业出版社, 2007: 38-41.  
Hans-Jurgen Zepernick, Adolf Filger. Pseudo random signal processing: theory and application[M]. Beijing: Electronic Industry Press, 2007: 38-41.
- [8] Bennett D J. 随机性[M]. 严子谦, 严磊 译, 长春: 吉林人民出版社, 2004: 45-47.  
Bennett D J. Randomness[M]. Changchun: Jilin people's publishing house, 2004: 45-47.
- [9] Cox T J. Predicting the scattering from reflectors and diffusers using two-dimensional boundary element methods[J]. J. Acoust. Soc. Am., 1994, 95(2): 874-878.