基于双谱的正弦信号重构

路伟涛，杨文革，洪家财，王立彬
(装备学院，北京 101416)

摘要：双谱由于和傅里叶变换存在一定变换关系，也存在栅栏效应，这给基于双谱的频率估计带来误差。为克服该效应，提出了双谱幅值模平方重心法，该方法以双谱幅值谱线的局域重心作为频率的估计值。仿真结果表明该方法的估计性能良好，且复杂度相对简单、运算量较小、实时性较强。同时为充分利用采样数据，采用不同方式构造出两组数据，再对这两组数据分别做双谱分析并估计正弦信号的频率和初相，最后进行平均处理，从而降低了估计方差，改善了估计均值，提高了估计性能。

关键词：频率估计；初相估计；双谱；重心法；栅栏效应
中图分类号：TN98 **文献标识码**：A **文章编号**：1000-3630(2013)-05-0426-04
DOI 编码：10.3969/j.issn1000-3630.2013.05.014

Sinusoidal signal reconstruction based on bispectrum

LU Wei-tao, YANG Wen-ge, HONG Jia-cai, WANG Li-bin
(*Academic of Equipment, Beijing* 101416, *China*)

Abstract: Related to Fourier transform, the bispectrum also has fence effect, which brings error to the bispectrum based frequency estimation. To overcome this influence, the bispectrum squared amplitude center method is proposed, which uses the local center of bispectrum lines to estimate frequency. Simulations show that this algorithm has good performance and less computation complexity. To make full use of the sampled data, two data sets are constructed to pursue bispectrum analysis. Thereafter, the frequency and initial phase of these two data sets are estimated respectively. Finally, average processing is performed to reduce the variance of estimation, so that improves the estimation performance.
Key words: frequency estimation; initial phase estimation; bispectrum; center method; fence effect

0 引 言

正弦信号频率相位的估计是通信、雷达、声纳以及电子对抗等领域的一个重要问题，同时在连线干涉测量(CEI)等高精度干涉测量体制获取相位时延的过程中也有着重要应用。国内外学者在时域处理和频域处理中都提出了很多方法[1,2]。考虑到高阶谱在环境信噪比较低时，对抑制高斯或类高斯噪声具有很好的性能，并且高阶谱还保留了信号的相位信息，能够重构信号，所以引起了该领域内研究人员越来越多的重视[1]。在高阶谱中，双谱由于计算量相对较小，同时也能克服高斯噪声的影响，成为最常用的信号分析方法。

基于双谱的信号重构算法在上世纪 80 年代就已开始研究，出现了很多经典算法，其中有多种幅值和相位的重构算法，以及相应的改进算法[3,4]。这些算法普适性较强，但在实际处理中也存在一些难以克服的问题[5]。考虑到正弦信号频谱及双谱的特点(理想情况下频谱只在信号频率处有冲击而双谱基本为零)，文献[5]提出先利用双谱精确估计出谐波信号的基波频率，然后在原采样数据中加入零相位、单位幅值的半基频信号，再对新数据进行双谱估计，估计出信号的频率和相位，进而实现信号的重构。但该算法估计基频需要多次求取信号的双谱，过程复杂，且计算量大，不利于实时处理；而文献[6]采用截短和抽取的方式产生了原始信号的半频信号，算法简单且比较有效，但是只做了初相的估计，同时只利用了部分采样数据。本文在文献[5,6]的基础上做了一些改进。仿真结果表明，改进算法的初相估计均值更趋于真值，估计均方根误差在低信噪比时降低了 20%左右；频率估计精度基本不变的前提下，简化了算法复杂度和降低了计算量。

收稿日期：2012-04-21；**修回日期**：2012-07-17
基金项目：总装试验技术研究项目(2011SY41A7001)
作者简介：路伟涛(1985－)，男，河南西华人，博士研究生，研究方向为航天器测量与控制、信号处理等。
通讯作者：路伟涛，E-mail: lwteecspku@126.com

1 基于双谱的信号重构原理

1.1 信号双谱的性质

设 $x(n)$， $n=0,1,2,\cdots,N-1$，为一零均值的实信

号。其三阶累积量定义为：

$$c_{3x}(k_1,k_2)=E[x(n)x(n+k_1)x(n+k_2)] \tag{1}$$

则 $x(n)$ 的双谱由式(2)给出：

$$B_x(f_1,f_2)=\sum_{k_1=0}^{N-1}\sum_{k_2=0}^{N-1}c_{3x}(k_1,k_2)e^{[-j(2\pi f_1k_1+2\pi f_2k_2)]} \tag{2}$$

双谱一般为复数，即

$$B_x(f_1,f_2)=|B_x(f_1,f_2)|e^{j\psi_B(f_1,f_2)} \tag{3}$$

信号双谱与其傅里叶变换(频谱)满足如下关系：

$$B_x(f_1,f_2)=X(f_1)X(f_2)X^*(f_1+f_2)= |X(f_1)||X(f_2)||X^*(f_1+f_2)|e^{j[\varphi(f_1)+\varphi(f_2)-\varphi(f_1+f_2)]} \tag{4}$$

从而有

$$\begin{aligned}&|B_x(f_1,f_2)|=|X(f_1)||X(f_2)||X^*(f_1+f_2)|\\&\psi_B(f_1,f_2)=\varphi(f_1)+\varphi(f_2)-\varphi(f_1+f_2)\end{aligned} \tag{5}$$

双谱具有对称性，满足以下关系：

$$B_x(f_1,f_2)=B_x^*(-f_1,-f_2) \tag{6}$$

由对称性可知，一个区域内的双谱可以描述与之对称的区域内的双谱。式(6)说明了一、三象限内双谱的对称关系，所以信号的参数估计可以在第一象限内进行。

1.2　正弦信号双谱的特点

设 $x(n)$ 为一正弦信号，如式(7)所示：

$$x(n)=\sin(2\pi f_0n/f_s+\phi_0),\ n=0,1,2,\cdots,N-1 \tag{7}$$

其中 f_0 为信号频率，ϕ_0 为初始相位，f_s 为采样率，N 为采样点数。

那么 $x(n)$ 的傅里叶变换为 $X(f)$，可表示为

$$X(f)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{\frac{-j2\pi fn}{N}}=|X(f)|e^{j\varphi(f)}=|X(f)|e^{j\phi_0} \tag{8}$$

易知理想情况下 $|X(f)|$ 只在 $\pm f_0$ 处有非零值，$X(f)$ 峰值处的相位与初相 ϕ_0 有关。由公式(4)、(5)双谱与频谱的关系，可知对于正弦信号的双谱：当 f_1、f_2 均不为 $\pm f_0$ 时，$X(f)=0$，从而有 $B_x(f_1,f_2)=0$；当 f_1、f_2 等于 $\pm f_0$ 时，$f_1+f_2\neq\pm f_0$，也有 $B_x(f_1,f_2)=0$。所以在理想情况下单一正弦信号的双谱为零，无法由其双谱进行参数估计。

这里在文献[6]的基础上利用原采样数据 $x(n)$ 重构出两组数据，分别为 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$，如式(9)所示，其中 $x_1(n)$ 为 $x(n)$ 前半段数据与 $x(n)$ 奇序列的叠加，$x_2(n)$ 为 $x(n)$ 前半段数据与 $x(n)$ 偶序列的叠加。

$$\begin{aligned}&x_1(n)=x(n)+x(2n)\\&x_2(n)=x(n)+x(2n+1),\ n=0,1,2,\cdots,N/2-1\end{aligned} \tag{9}$$

其中：

$$x(n)=\sin(2\pi n\frac{f_0}{f_s}+\phi_0)=\sin(2\pi n\frac{f_0/2}{f_s/2}+\phi_0)$$

$$x(2n)=\sin(2\pi 2n\frac{f_0}{f_s}+\phi_0)=\sin(2\pi n\frac{f_0}{f_s/2}+\phi_0)$$

$$x(2n+1)=\sin(2\pi(2n+1)\frac{f_0}{f_s}+\phi_0)=\sin(2\pi n\frac{f_0}{f_s/2}+\phi_0+2\pi\frac{f_0}{f_s})$$

$$n=0,1,2,\cdots,N/2-1$$

由式(5)、(9)可以发现，重构的两组数据 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的双谱在($f_0/2$，$f_0/2$)处有峰值，而在其他坐标处理论上均为零。那么可以此进行正弦信号的参数估计，最后进行平均处理，完成信号频率、初相的估计。

2　正弦信号参数估计

2.1　初相的估计

设 $B_1(f_1,f_2)$、$B_2(f_1,f_2)$ 分别为 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的双谱，$\psi_1(f_1,f_2)$、$\psi_2(f_1,f_2)$ 为其相位谱。考虑到双谱与信号傅里叶变换的关系，理论上 $B_1(f_1,f_2)$、$B_2(f_1,f_2)$ 在第一象限内 $(f_0/2,f_0/2)$ 处有最大值，而在该象限内的其他点为零。假如已知频率 f_0，即可得到初相估计：

$$\psi_1(f_0/2,f_0/2)=2\varphi_1(f_0/2)-\varphi_1(f_0)=2\phi_0-\phi_0=\phi_0 \tag{10}$$

$$\hat{\phi}_{01}=\psi_1(f_0/2,f_0/2) \tag{11}$$

设 X_{2n}、X_{2n+1} 分别为 $x(n)$ 奇、偶序列的傅里叶变换，则：

$$X_{2n+1}=X_{2n}\exp(j2\pi f_0/f_s) \tag{12}$$

那么由 $\psi_2(f_1,f_2)$ 也可以得到信号初相的估计。

$$\psi_2(f_0/2,f_0/2)=\varphi_2(f_0/2)+\varphi_2(f_0/2)-\varphi_2(f_0)= 2\phi_0-(\phi_0+2\pi f_0/f_s)=\phi_0-2\pi f_0/f_s \tag{13}$$

$$\hat{\phi}_{02}=\psi_2(f_0/2,f_0/2)+2\pi f_0/f_s \tag{14}$$

由此得到初相 ϕ_0 的估计 $\hat{\phi}_0$：

$$\hat{\phi}_0=\frac{\hat{\phi}_{01}+\hat{\phi}_{02}}{2} \tag{15}$$

2.2　频率的估计

考虑到 $|B_1(f_1,f_2)|$ 在 $(f_0/2,f_0/2)$ 处存在最大值，则在双谱幅值域内搜索，峰值的位置应该在 $(f_0/2,f_0/2)$ 处，假设对应的坐标为 (m_0,m_0)。由此可以得到频率的估计 $\hat{f}_{01}$：

$$\hat{f}_{01}=2m_0\Delta f,\ \Delta f=f_s/(N/2) \tag{16}$$

考虑到傅里叶变换存在栅栏效应，当信号频率 f_0 不是频率分辨率 Δf 的整数倍时，频率估计就会存在 $\pm0.5\Delta f$ 的误差。借鉴频率估计中的 Rife 算法[7]和能量重心校正算法[8]，本文采用重心法对双谱幅值谱峰位置进行精确估计，从而得频率的精确估计。

取以峰值坐标 (m_0,m_0) 为中心的局域，假设该局域包含点 (m,n)，$m,n\in[m_0-K,m_0+K]$，K 为某一正整数，则在双谱幅值模平方域该局域的重心为：

$$(m_h,n_h)=\frac{\sum_{k_1=m_0-K}^{m_0+K}\sum_{k_2=m_0-K}^{m_0+K}|B(f_1,f_2)|^2*(k_1,k_2)}{\sum_{k_1=m_0-K}^{m_0+K}\sum_{k_2=m_0-K}^{m_0+K}|B(f_1,f_2)|^2} \tag{17}$$

式(17)可以如下理解。理想情况下，双谱幅值模平方的重心应在真实频率处，考虑到双谱的对称性，可得如下关系式：

$$\sum_{k_1=-\infty}^{+\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{+\infty}|B(f_1,f_2)|^2(k_1-m_h,k_2-n_h)=0 \tag{18}$$

式(18)展开整理后，并选择双谱功率集中区域，即可得到式(17)。假设信号频率等于频率分辨率的 m 倍(m 为正整数)，那么理想情况下有

$$\begin{cases}|B(f_1,f_2)|=0, & f_1\neq m\Delta f \text{ 或 } f_2\neq m\Delta f\\ |B(f_1,f_2)|\neq 0, & f_1=m\Delta f \text{ 且 } f_2=m\Delta f\end{cases} \tag{19}$$

那么由式(17)、(18)可知双谱幅值不为零处即为信号频率的估计。同样在一般情况下，真实频率不是频率分辨率的整数倍，由式(17)得到的双谱幅值模平方重心即为真实频率位置的估计。

由于双谱的对称性，$m_h=n_h$，从而可以得到频率的精确估计：

$$\hat{f}_0=2m_h\Delta f,\quad \Delta f=f_s/(N/2) \tag{20}$$

至此，得到了正弦信号频率和初相的估计。考虑到初相的估计需要频率为先验知识，所以在实际处理过程中应按照先频率估计再初相估计的顺序。

本文的频率估计算法避免了文献[5]中基频估计时在双谱峰值附近反复搜索的过程，简化了算法的复杂度，减少了计算量，有利于算法实时性的实现；本文的初相估计算法相对于文献[6]更加充分地利用了采样数据，在一定程度上降低了估计误差，提高了估计性能。

3 仿真分析

3.1 频率的估计仿真

为了更好地对比算法性能，这里参数设置与文献[5]一致，采样点数 N=4096，双谱估计分段处理，每段长 1024，重叠 50%；整周采样时采样率 f_s=256 Hz，频率分辨率 0.0625 Hz，信号频率 f_0=6 Hz；非整周采样时，采样率 f_s=200 Hz，频率分辨率约为 0.0488 Hz；信号频率 f_0=6.125 Hz。蒙特卡洛仿真 100 次。仿真结果如图 1 所示。

由图 1(a)可见整周采样时，本文算法的频率估计均值与文献[5]的算法估计性能基本一致，在信噪比稍低时(0dB 以下)偏差稍大；当信噪比稍大时两个算法基本重合；当信噪比为 5dB 时，频率估计均方根误差为 0.015 个频率分辨率(f_s/N，即 $\Delta f/2$)；当信噪比为 10dB 时，频率估计均方根误差为 0.0073 个频率分辨率，估计精度较高。由图 1(b)看出非整周采样时，本文算法的估计均值相对文献[5]的算法估计性能稍差。随着信噪比的提高，在算法性能趋于稳定时，频率估计均值相对于真实频率存在一个偏差，约为 0.2×10^{-3} Hz。算法估计均方根误差也比较小，当信噪比为 5dB 时，频率估计均方根误差为 0.011 个频率分辨率；当信噪比为 10dB 时，频率估计均方根误差为 0.0057 个频率分辨率。值得指出的是，本文的频率估计算法在低信噪比(整周采样 SNR<–15dB，非整周采样 SNR<–10dB)时性能较差。

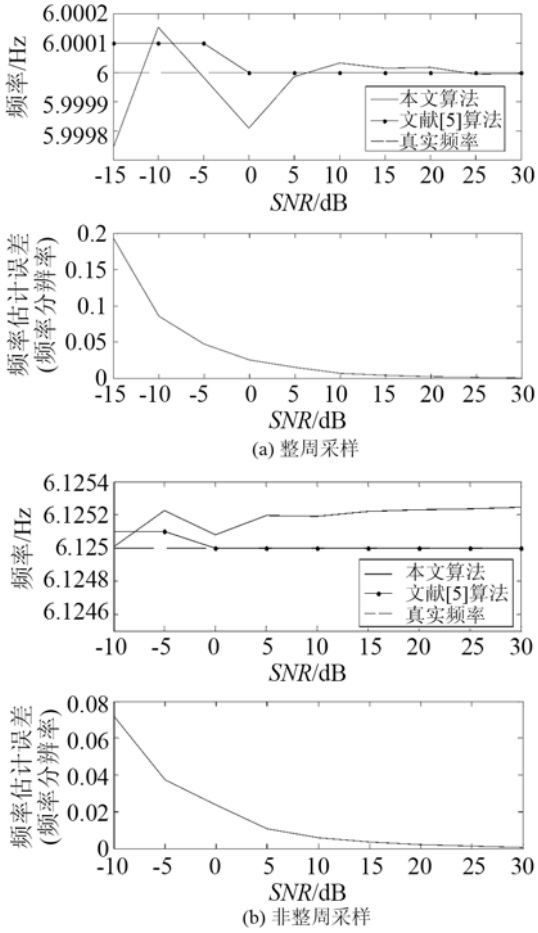


图 1 本文算法与文献[5]算法频率估计性能对比

Fig.1 Comparison of frequency estimation performance between proposed method and Ref.4's method

综上所述，本文的频率估计算法在整周采样时估计性能与文献[5]的算法性能基本一致，非整周采样时估计性能相对较差，但估计均方根误差与整周采样时一致或更小。考虑到本文算法相对简单，计算量小，可以应用在实时性较强的背景中。

3.2 初相的估计仿真

同样为了对比算法性能，初相估计中参数设置

与文献[6]一致，即整周采样时采样率 f_s=1552 Hz，f_0=97 Hz，初相为 0.2π；非整周采样时 f_s=1843 Hz；N=4096，双谱估计分段处理，每段长 1024，重叠 50%，蒙特卡洛仿真 100 次。文献[6]算法与本文算法的初相估计性能对比如图 2 所示，可以看出改进算法相比原算法均值更加平稳，趋近真实相位，估计均方根误差在各种信噪比下均有所提高，而且在低信噪比时提高稍微显著，降低了将近 20%。

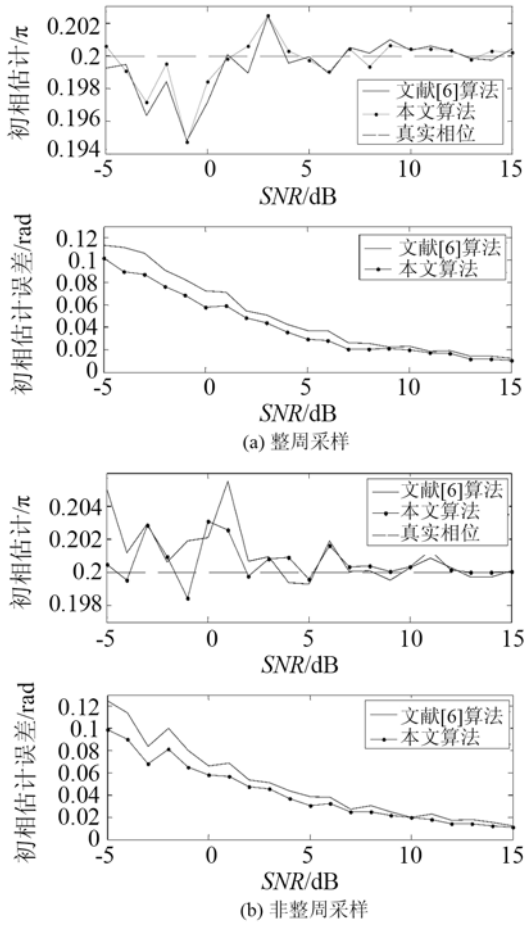


图 2　本文算法与文献[6]算法初相估计性能对比

Fig.2　Comparison of initial phase estimation performance between proposed method and Ref.5's method

4　结 论

双谱作为最常用的一种高阶谱分析方法，具有运算量小、抑制高斯噪声能力强的特点，并保留了信号的相位信息，在信号重构课题中得到重视而被深入研究。本文针对双谱重构正弦信号过程中存在的问题，将相关算法做了一些改进。

为克服双谱的栅栏效应给频率估计带来误差的问题，提出了双谱幅值模平方重心法，仿真结果表明：整周采样时与文献[5]中的算法性能基本一致，非整周采样时算法性能稍差，但估计的均方根误差较小。由于该算法能简化复杂度和运算量较小，故可以应用在实时性要求较高的领域。

为充分利用采样数据，本文采用不同方式构造出两组数据(原采样数据的前半段分别加奇序列与偶序列)，再对这两组数据分别做双谱分析并估计正弦信号的频率和初相，最后进行平均处理。仿真结果表明该处理降低了估计方差，改善了估计均值，提高了估计性能。

参　考　文　献

[1] 齐国清，贾欣乐. 基于 DFT 相位的正弦波频率和初相的高精度估计方法[J]. 电子学报, 2001, **29**(9): 1164-1167.
QI Guoqing, JIA Xinle. High Accuracy Frequency and Phase Estimation of Signle-Tone Based on Phase of DFT[J]. Acta Electronica Sinica, 2001, **29**(9): 1164-1167.

[2] Dusan Agrez, Improving Phase Estimation with Leakage Minimization[C]// IMTC 2004–Instrumentation and Measurement Technology Conference, Como, Italy, 162-167, 2004. 05.

[3] 孙景荣，许录平，王婷. 基于双谱谐波的脉冲星信号消噪方法[J]. 华中科技大学学报: 自然科学版, 2010, **38**(8): 9-12.
SUN Jingrong, XU Luping, WANG Ting. Denoising pulsar signal by bispectrum filters[J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology: Nature Science, 2010, **38**(8): 9-12.

[4] 李亚峻，李月，高颖. 基于双谱幅值和相位重构的地震子波提取[J]. 地球物理学进展, 2007, **22**(3): 947-952.
LI Yajun, LI Yue, GAO Ying. A method of Extracting Seismic Wavelet based on Bispectrum Amplitude and Phase Reconstruction[J]. Process in Geophysics, 2007, **22**(3): 947-952.

[5] 樊养余，李平安，孙进才，等. 基于双谱的谐波信号相位重构[J]. 信号处理, 2000, **16**(1): 2-5.
FAN Yangyu, LI Pingan, SUN Jincai, et al. Accurate phase reconstruction of measured signals from bispecgrum[J]. Signal Processing, 2000, **16**(1): 2-5.

[6] 牛鹏辉，涂亚庆. 一种基于双谱的正弦波初相估计方法[J]. 电测与仪表, 2006, **43**(490): 1-3.
NIU Penghui, TU Yaqing. Phase estimation of sinusoidal signal based on bispectrum[J]. Electrical Measurement & Instrumentation. 2006, **43**(490): 1-3.

[7] Rife D C, Vincent G A. Use of discrete fourier transform in the measurement of frequencies and levels of tones[J]. Bell Syst Tech. J., 1970, **49**(2): 197-228.

[8] 丁康，江利旗. 离散频谱的能量重心校正法[J]. 振动工程学报, 2001, **14**(3): 354-358.
DING Kang, JIANG Liqi. Energy centrobaric correction method for discrete spectrum[J]. Journal of Vibration Engineering, 2001, **14**(3): 354-358.