

基于压缩感知的水声数据压缩与重构技术

李 佩, 杨益新

(西北工业大学航海学院, 陕西西安 710072)

摘要: 在水声信号处理中, 数据量大造成的数据处理压力不容忽视。为了有效地提取水声数据中的有用信息, 同时缓解数据量大带给水声数据传输的压力, 研究压缩感知(Compressed Sensing, CS)的基本原理及其关键技术, 综述了 CS 理论框架并着重介绍了稀疏变换、观测矩阵设计和重构算法三个方面。通过仿真实验表明了压缩感知技术能够有效地用于模拟数据的压缩与重构。重点对水声舰船噪声信号进行了基于 CS 的压缩与重构仿真实验, 验证了压缩感知技术运用于水声数据处理的有效性, 从而达到提高水声数据传输速率的目的。

关键词: 信息采样; 压缩感知; 测量矩阵; 稀疏表示

中图分类号: TN 911

文献标识码: A

文章编号: 1000-3630(2014)-01-0014-07

DOI 编码: 10.3969/j.issn1000-3630.2014.01.004

Compressed sensing based acoustic data compression and reconstruction technology

LI Pei, YANG Yi-xin

(School of Marine Science and Technology, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, Shaanxi, China)

Abstract: In underwater acoustic signal processing, the pressure on data processing due to large amount of data cannot be neglected. In order to effectively extract the useful information in the underwater acoustic data, and meantime to alleviate the pressure of the large amount of data on underwater acoustic data transmission, the basic principle and key technology of CS (Compressed Sensing) are studied in this paper, including that the theoretical framework of CS is reviewed and emphatically three basic aspects of CS technology, such as the sparse transformation, observation matrix design and reconstruction algorithm, are discussed. Simulation experiments show that the CS technology can be effectively applied to simulated data compression and reconstruction. Mainly, the simulation experiment of the CS based compression and reconstruction technology for underwater ship noise signal is conducted in this paper, and the results validate that the compressed sensing technology can be successfully applied in underwater acoustic data processing to achieve the goal of lowering underwater acoustic data transmission rate.

Key words: information sampling; compression sensing; measurement matrix; sparse representation

0 引言

奈奎斯特采样定理指出, 当采样速率达到信号带宽的两倍及以上时, 才能由采样信号精确地重构原始信号。然而随着人们对信息需求量的增加, 携带信息的信号带宽越来越宽, 以此为基础的信号处理框架要求的采样速率和处理速度也越来越高。解决这些压力常见的方案就是信号压缩技术。

于是很自然地引出一个问题: 能否使用某种变换方法来描述信号, 使得在保证信息不丢失的情况下, 用远低于奈奎斯特采样定理要求的速率对信

号进行采样, 同时又可以精确地重构原信号。为了解决这一问题, D. Donoho^[1], E. Candès 和 T. Tao^[2,3] 等人在 Kashin^[4] 创立的范函分析和逼近论的基础上, 提出了基于信号稀疏性的压缩感知方法, 并构造了压缩感知的具体算法, 成功地解决了信号的采样和压缩问题。

当前, 压缩感知理论主要涉及三个核心问题:

- (1) 具有稀疏表示能力的过完备字典设计;
- (2) 满足非相干性或等距约束性准则的测量矩阵设计;
- (3) 快速鲁棒的信号重建算法设计。

在压缩感知的理论框架下, 采样速率很大程度上取决于两个基本准则: 稀疏性和非相干性(稀疏性和等距约束性)。

压缩感知理论的引人之处还在于它对应用科学的许多领域具有重要的影响, 如统计学、信息论、

收稿日期: 2013-07-01; 修回日期: 2013-10-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11274253)。

作者简介: 李佩(1987—), 女, 四川内江人, 硕士研究生, 研究方向为水声信号处理。

通讯作者: 杨益新, E-mail: xyang@nwpu.edu.cn

编码等。目前,学者们已经在模拟-信息采样、合成孔径雷达成像、遥感成像、核磁共振成像、深空探测成像、无线传感器网络、信源编码、人脸识别、语音识别、探地雷达成像等诸多领域对压缩感知展开了广泛的应用研究。

这里提出使用压缩感知进行水声数据的压缩与重构,在压缩感知理论提出之前,水声数据的压缩方法主要有哈弗曼变换、离散余弦变换等。相比较于这些常规方法,压缩感知主要有两大优点。第一,降低采样率;第二,提高数据传输速率。

压缩感知(Compressed Sensing, CS)理论它主要涉及几个方面的内容:如何对信号 $x \in \mathbb{R}^N$ 进行稀疏表示;怎样设计一个平稳且与变换基不相关的测量矩阵;如何设计快速重构算法。本文着重研究了 CS 理论及其关键技术在水声数据压缩与重构中的应用。

1 压缩感知理论

压缩感知理论是近年来提出的一种基于信号稀疏性表示的新型采样理论。与传统数据采样理论不同,该定理指出可以用远少于传统采样定理所需的观测点数或采样点数进行原始信号或图像的恢复。该理论表明:如果信号通过某种变换(如小波变换、傅里叶变换)之后可以进行稀疏表示的,那么就可以设计一个与变换基不相关的测量矩阵,对得到的测量值进行优化求解,实现信号的近似重构^[1]。信号的观测过程是非自适应的,测量矩阵的设计不依赖于信号的结构,并且压缩感知的应用很大程度上是为了减少测量时间、采样速率和测量设备的数量。

1.1 信号的稀疏表示

信号是否具有稀疏性或可压缩性是压缩感知实现的重要前提和理论基础。稀疏的数学定义:信号 x 在正交基 Ψ 下的变换系数向量为 $\theta = \Psi^T x$, 假如对于 $0 < p < 2$ 和 $R > 0$, 这些系数满足:

$$\|\theta\|_p = (\sum |\theta_i|^p)^{1/p} \leq R \quad (1)$$

则说明系数向量 θ 在某种意义上是稀疏的^[2]。另一种定义:如果变换系数 $\theta_i = \langle x, \Psi_i \rangle$ 的支撑域 $\{i: \theta_i \neq 0\}$ 的势小于或等于 K , 则可以说信号是 K 项系数的。进行压缩感知处理的前提是信号的可稀疏性表示,之后要解决的是如何找到信号最佳的稀疏域。只有选择了合适的基表示信号,才能保证信号的稀疏度,从而保证原始信号的恢复精度。在研究信号的稀疏表示时,可以通过变换系数衰减速度来衡量变换基的稀疏表示能力。Candès 和 Tao 的研究表明当信号满足具有幂次速度衰减时,可以利用压

缩感知理论进行恢复^[3], 并且重构误差满足:

$$E = \|\hat{X} - X\|_2 \leq C_r \cdot (K/\lg N)^6 \cdot r^r \quad (2)$$

其中: $r = 1/p - 1/2, 0 < p < 1$ 。

下面假设一信号 x , 长度为 N , 基向量为 Ψ , 对信号进行变换:

$$x = \sum_{i=1}^N a_i \Psi_i \text{ 或 } x = \Psi a \quad (3)$$

其中, x 是信号在时域上的表示, a 是信号在 Ψ 域上的表示。

如果式(3)中的 a 只有 K 个是非零值 ($N \gg K$), 或者 a 经排序后按指数级衰减并趋近于零, 则可认为信号是稀疏的。信号的可稀疏表示是压缩感知的先验条件。在信号是可稀疏表示的前提下, 压缩感知处理可以分为以下两步:

(1) 设计一个与变换基不相关的 $M \times N$ ($M \ll N$) 维测量矩阵对原始信号进行观测, 得到 $M \times 1$ 维测量向量;

(2) 从所得到的 $M \times 1$ 维测量向量重构出原始信号。

1.2 观测矩阵的设计

压缩感知理论中, 通过变换得到信号的稀疏系数向量 $\theta = \Psi^T X$ 后, 需要设计压缩采样系统的观测部分, 它围绕观测矩阵 Φ 展开。观测过程实际就是利用 $M \times N$ 维观测矩阵 Φ 的 M 个行向量 $\{\psi_j\}_{j=1}^M$ 对稀疏系数向量进行投影, 即计算与各个观测向量 $\{\psi_j\}_{j=1}^M$ 的内积, 得到 M 个观测值 $y_j = \langle \theta, \psi_j \rangle$ ($j=1, 2, \dots, M$), 记观测向量, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, 即

$$Y = \Phi \theta = \Phi \Psi^T X = A^{CS} X \quad (4)$$

根据上式中的描述, 这里的采样过程是非线性的, 即 Φ 无需根据 X 而变化^[5]。对于上式求出 θ 是一个线性规划问题, 但由于 $M \ll N$, 即方程的个数少于未知数的个数, 这是一个欠定问题。如果 θ 具有 K 项稀疏性 ($K \ll M$), 则该方程有可能求出确定解。这时, 我们需要确定出 θ 中的 K 个非零系数 θ_i 的合适位置。由于观测向量 Y 是这些非零系数 θ_i 对应 Φ 的 K 个列向量的线性组合, 从而可以形成一个 $M \times K$ 的线性方程组来求解这些非零项的具体值。对此, 有限等距性质给出了存在确定解的充要条件。

首先用一个与变换矩阵不相关的 $M \times N$ 维测量矩阵 Φ 进行线性投影, 得到线性测量值 y :

$$y = \Phi x \quad (5)$$

由此得到的测量值 y 是一个 $M \times 1$ 维矩阵, 于是可以将测量对象从 N 维降到 M 维, 测量矩阵 Φ 的

选取是不依赖于信号 x 的。由于信号 x 是可稀疏表示的, 式(5)可以重写为:

$$y = \Phi x = \Phi \Psi a = \Theta a \quad (6)$$

其中, Θ 是一个 $M \times N$ 矩阵。转换过程如图 1 所示。由于式(4)中的方程个数远小于未知数个数(即 $M \ll N$), 即方程无确定解, 无法重构信号。但是由于信号是 K 阶稀疏的($K \ll M$), 若式(6)中的 Θ 满足有限等距性质(Restricted Isometry Property, RIP)^[6], 即对任意的 K 阶稀疏信号 x 和常数 $\varepsilon \in (0, 1)$, 矩阵 Θ 满足:

$$1 - \varepsilon \leq \frac{\|\Theta x\|_2^2}{\|x\|_2^2} \leq 1 + \varepsilon \quad (7)$$

则 K 个系数能够从 M 个测量之中准确重构。RIP 性质的等价条件是测量矩阵 Θ 和稀疏基 Ψ 互不相关。

2 压缩感知信号的重构实现

2.1 信号重构算法设计

RIP 性质从理论上保证了 K 阶稀疏信号能有 M 个测量值 y 重构出长度为 N 的信号 x 。这类求逆问题的传统解法可以通过求解最小 L-2 范数^[7]:

$$\hat{a} = \arg \min \|a\|_2 \text{ subject to } \Theta a' = y \quad (8)$$

但是最小 L-2 范数得到的向量 a 是非稀疏性的, 而本文要寻找的向量 a 是 K 阶稀疏的。即此种方法不能找出本文所需要的解, 于是求解 L-0 范数:

$$\hat{a} = \arg \min \|a\|_0 \text{ subject to } \Theta a' = y \quad (9)$$

运用最小 L-0 范数法, 只需要 $M=K+1$ 个测量值, 就可以精确重构 K 阶系数信号。但是求解的数值运算不稳定且是个求解非确定值多项式的问题, 即求解非确定值多项式的问题, 于是提出了用 L-1 范数代替 L-0 范数可以得到相同的解:

$$\hat{a} = \arg \min \|a\|_1 \text{ subject to } \Theta a' = y \quad (10)$$

分析可知, 当服从独立同分布的高斯测量值的个数 $M \geq K \lg(N/K)$ 时, 用 L-1 范数能够高概率地精确重建 K 阶稀疏向量, 这样问题就变成了一个凸优化问题, 从而转化为一个求解线性规划的问题。综上理论研究, 可得出信号压缩感知的总流程图^[4,5], 如图 1 所示。

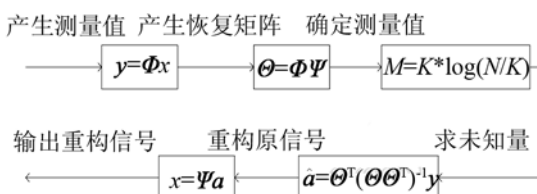


图 1 压缩感知算法流程图

Fig.1 Flow chart of CS (Compressed Sensing)

具体流程为:

(1) 先产生测量矩阵(本论文采用的是高斯随机矩阵)对信号进行测量, 得到测量值 y 。

(2) 产生一个傅里叶变换矩阵, 并且与测量矩阵相乘得到恢复矩阵。

(3) 产生测量次数, 分析当 $M \geq K \lg(N/K)$ 时, 重构的效果非常好, 于是仿真实验中采用 $M = 3K \lg(N/K)$ 作为测量次数, 然后用最小二乘法求解未知量, 即变换系数 $\hat{a} = \Theta^T (\Theta \Theta^T)^{-1} y$ 。

(4) 由变换系数 a 设计出傅里叶变换重构信号 x 。

2.2 正交匹配追踪法流程

在压缩感知处理中的核心问题是正交匹配追踪法(Orthogonal Matching Pursuit, OPM)^[7], 它是以贪婪迭代的方法选择 Φ 的列, 使得在每次迭代中所选择的列与当前的冗余向量最大程度地相关, 从测量向量中减去相关部分并反复迭代, 直到迭代次数达到稀疏度 K , 强制迭代停止。OPM 算法的输入为: $M \times M$ 维测量矩阵 Φ , M 维观测值 y , 信号的稀疏度 K 。OPM 算法的输出为: N 维恢复信号 x 。

OPM 算法通过求余量 r 与感知矩阵 Φ 中各个原子(的各列)之间内积的绝对值, 来计算相关系数 u :

$$u = \{u_j | u_j = \langle r, \phi_j \rangle, j=1, 2, \dots, N\} \quad (11)$$

并采用最小二乘法进行信号逼近以及余量更新:

$$\hat{X} = \arg \min \|Y - \Phi_\lambda X\|_2 \quad (12)$$

$$r_{\text{new}} = Y - \Phi_\lambda \hat{X} \quad (13)$$

OMP 具体算法^[6]步骤如下:

(1) 初始余量 $r_0 = Y$, 迭代次数 $n=1$, 索引值集合 $\Lambda = \emptyset, J = \emptyset$;

(2) 由式(11)计算相应系数 u , 并将 u 中最大值对应的索引值存入 J 中;

(3) 更新支撑集 Φ_λ , 其中 $\Lambda = \Lambda \cup J$;

(4) 由式(12)计算得到 \hat{X} , 同时用式(13)对余量进行更新。

(5) 若 $m < K$, 令 $r = r_{\text{new}}, n = n + 1$, 继续跳转到步骤(2); 否则, 停止迭代。

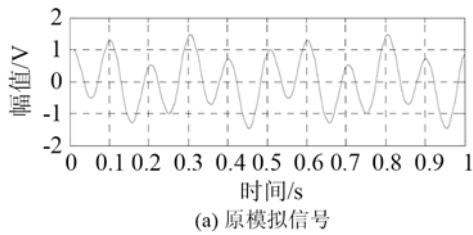
3 实验验证

3.1 模拟信号实验验证

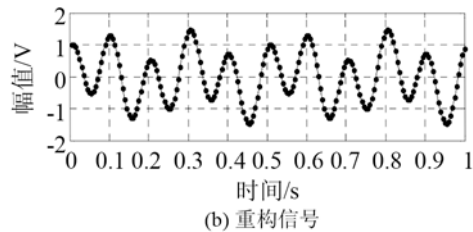
为了能够模拟一个稀疏度明显的单频模拟信号, 选择的单频信号中没有加入噪声分量, 模拟信号为 $x = \cos(0.1\pi t) + 0.5 \sin(0.04\pi t)$, 采样点数为 200

点，采样时间为 1s，此模拟信号经过傅里叶变换之后，只有两个有效成分，稀疏性非常明显，满足压缩感知信号稀疏表示的前提。

当模拟信号的测量点数 $N=200$ 时，稀疏度=2，所以当测量次数 $M \geq K \lg(N/K)=20$ 时，重构误差已经降低到 10^{-15} 量级上，并且误差非常平稳，已经达到精确重构的条件。在具体仿真中选择测量次数 $M=3K \lg(N/K)$ ，得到模拟信号重构前后时域的波形对比图以及包络对比图如图 2、3 所示：

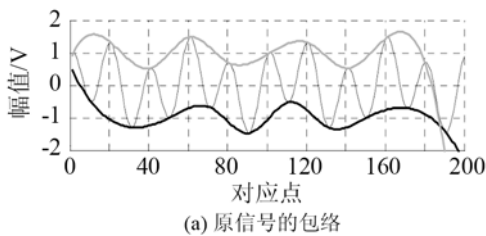


(a) 原模拟信号

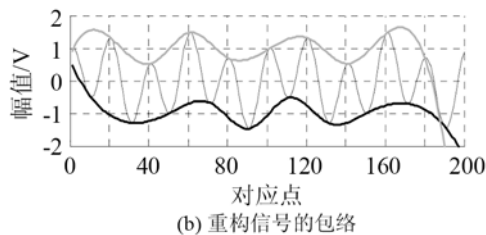


(b) 重构信号

图 2 原始信号与重构信号波形对比图
Fig.2 Waveform comparison between original and reconstructed signals



(a) 原信号的包络

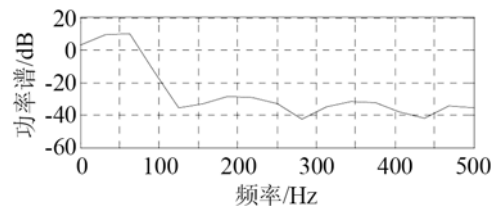


(b) 重构信号的包络

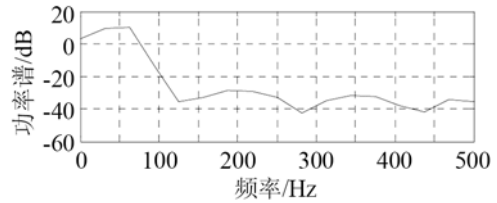
图 3 原始信号与重构信号包络对比图
Fig.3 Envelope contrast figure between original and reconstructed signals

由图 2、3 可知，信号经压缩感知处理，重构前后在时域波形以及包络上几乎没有什么差别，可以说是实现了信号在时域上的精确重构。接着我们做了功率谱图分析，见图 4。

由图 4 可知，重构信号与原始信号没有明显差别，表明重构信号保持了原始信号的频域特征，实现了频域上的压缩和精确重构。重构信号保持了原



(a) 原信号功率谱图



(b) 重构信号功率谱图

图 4 原始信号与重构信号功率谱对比图
Fig.4 Power spectral contrast figure between original and reconstructed signals

始信号的功率谱特性。

为了更加清楚地确定信号的相似性以及重构误差，在此进行信号重构误差的分析，如图 5 所示。

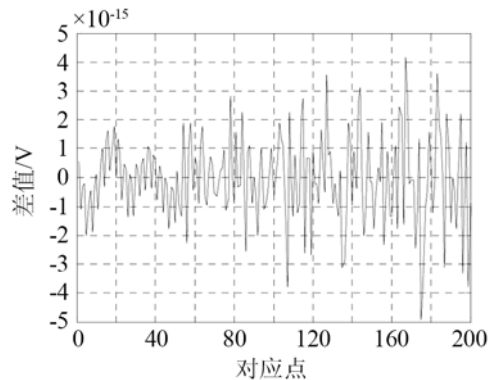


图 5 原始信号与重构信号差值图

Fig.5 Differences of corresponding values between original and reconstructed signals

从图 5 中看到重构出每一个点的误差非常之小，差值保持在 10^{-15} 量级上。由以上分析认为，压缩感知理论对单频信号是可以实现压缩以及精确重构的。

3.2 实际水声信号实验验证

为了验证压缩感知技术在水声信号领域的适用性，选取一个典型的水声信号进行实验仿真。由于在水声信号处理中，舰船辐射噪声是一类很容易碰到的信号，也是水声信号中典型的一类信号，于是截取了一段实录的舰船辐射噪声信号进行压缩感知与重构的分析。在压缩感知理论中，信号噪声分量对压缩影响较大，于是在进行水声信号压缩之前，首先对水声信号进行降噪处理。本文假设噪声为平稳加性的，并选择小波降噪的方法对水声信号

进行降噪处理。

以三层分解为例给出了小波阈值降噪的流程图如图 6 所示。

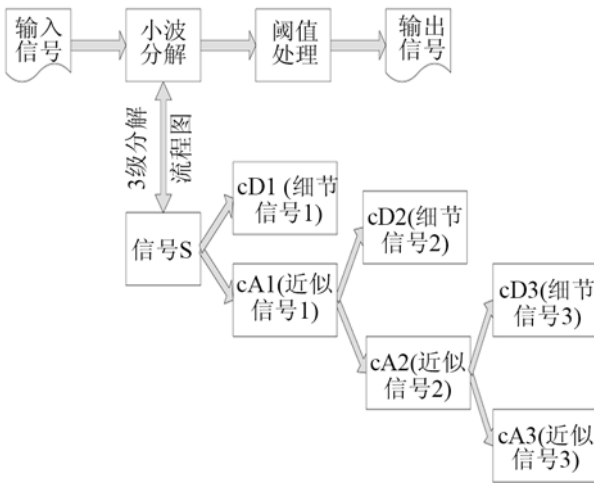


图 6 小波阈值降噪流程图

Fig.6 Flow chart of wavelet threshold de-noising

舰船信号的仿真中采取三层小波变换，得到信号去噪前后的波形，如图 7 所示。

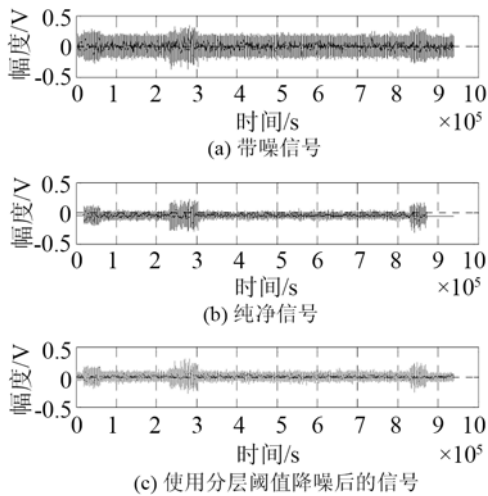


图 7 带噪信号、纯净信号和信号降噪后的信号波形图对比

Fig.7 Signal waveforms of the signal with noise, the pure signal and the signal after denoising

带噪信号和去噪信号的频谱图对比情况如图 8、9 所示。

由图 8、9 分析可知经小波去噪后几乎把所有小的噪声分量都抑制掉了。截取一段舰船的信号进行压缩感知与重构的分析。

首先需要说明原始舰船噪声信号和滤波后噪声信号的稀疏性，图 10 和图 11 给出了舰船噪声信号的稀疏度图。

由舰船噪声信号的稀疏度图可知，信号的稀疏性很高，对信号运用压缩感知技术得到信号压缩重构前后的波形图，如图 12 所示。

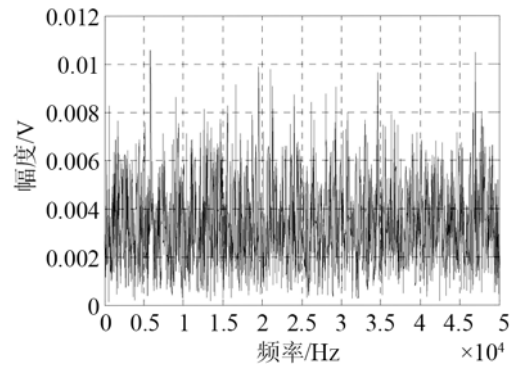


图 8 带噪信号频谱图

Fig.8 Spectrum of the signal with noise

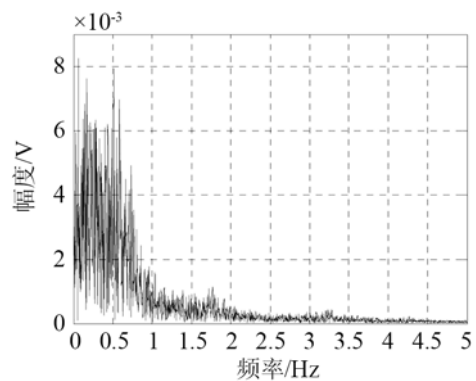


图 9 降噪后信号频谱图

Fig.9 Spectrum of the signal after denoising

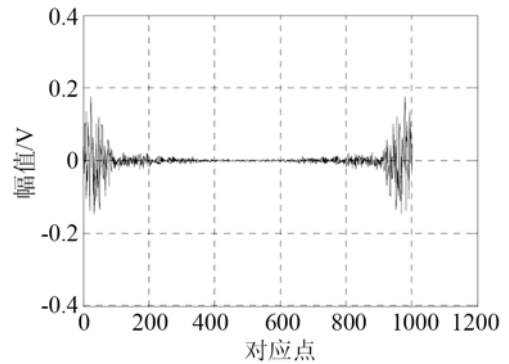


图 10 原始舰船噪声信号稀疏度图

Fig.10 The sparseness graph of original ship noise signal

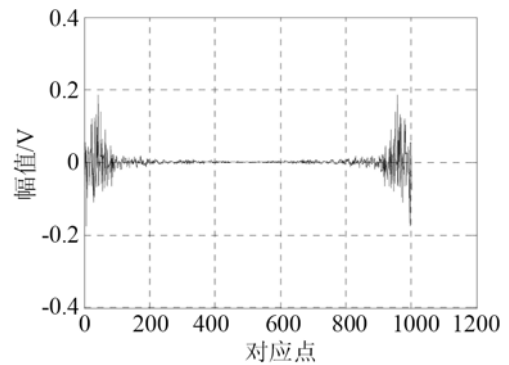


图 11 去噪后舰船噪声信号稀疏度图

Fig.11 The sparseness graph of ship noise signal after denoising

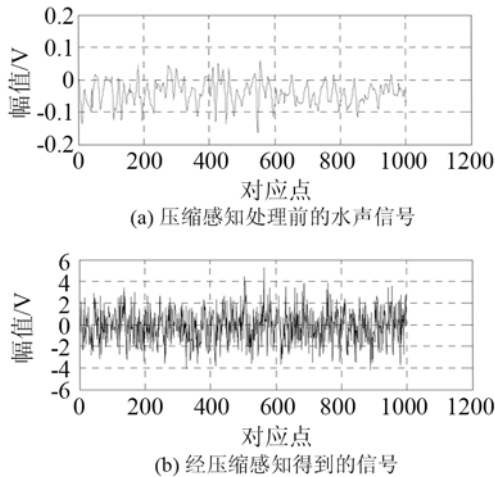


图 12 原始舰船噪声信号重构前后波形对比图
 Fig.12 The waveforms of ship noise signals (upper: original; lower: reconstructed)

从图 12 中可以看出，未经除噪处理的舰船辐射信号的重构信号与原信号有比较大的差异。因此对原信号又做了小波除噪，然后再经压缩感知重构出恢复信号，如图 13 所示。从图 13 中可以看出，除噪后的舰船噪声辐射信号经压缩感知重构后得到的恢复信号与原始信号的波形重合度很高，可以说是完成了舰船辐射信号的精确重构。

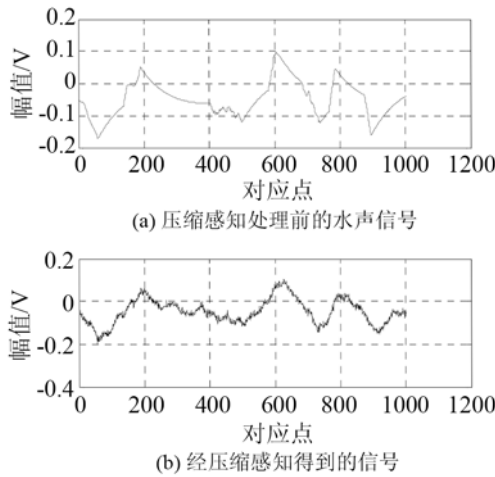


图 13 除噪后的舰船噪声信号在压缩感知重构前后的波形对比图
 Fig.13 The denoised ship noise signal waveforms before and after the CS based reconstructed processing

为了进一步说明每个分量的具体差别，又做了信号除噪前后经压缩感知后的信号重构误差分析，如图 14、15 所示。

由图 14、15 分析可知，重构信号与原始信号呈现线性相关关系，并且在每个点上差别比较小，特别是去噪后的舰船噪声信号基本上把误差控制在 10^{-2} 量级以下，这种误差在水声信号处理中是可以接受的。总之，压缩感知理论对于舰船噪声的信号实现了压缩和精确重构。但是，水声信号中的噪

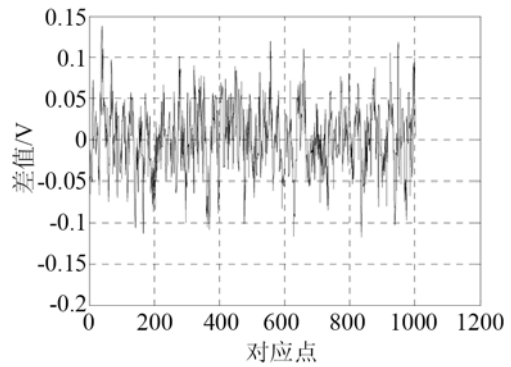


图 14 原始水声舰船噪声信号重构误差图
 Fig.14 The reconstruction error of the original ship noise signal

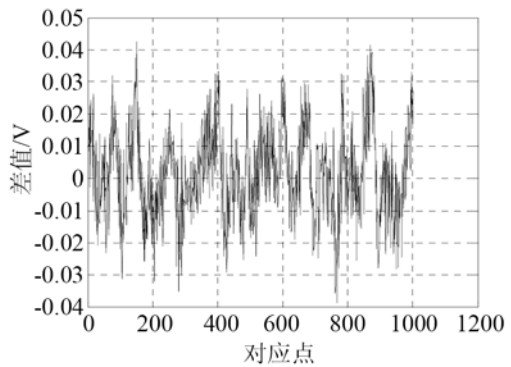


图 15 除噪后水声舰船噪声信号重构误差图
 Fig.15 The reconstruction error of the denoised ship noise signal

声分量对压缩感知的运用有较大影响和干扰，在对水声信号进行基于压缩感知理论的数据压缩和重构需要事先对原始信号进行去噪，从而大幅度提高重构精度。

4 结论

压缩感知理论利用了信号的稀疏特性，提出了可以用远远少于传统采样理论所需要的采样点数或观测点数恢复出原信号或图像。本文仿真实验表明压缩感知理论能够成功运用于水声信号的压缩处理，并且比同类水声数据压缩方法在具有更低采样率的同时，提高了信号的传输速率，同时还验证了水声信号中的噪声分量对压缩感知的重构精确度有较大的影响和干扰。

压缩感知理论的研究已取得了一些成果，但仍然存在大量的问题需要研究。压缩感知理论是数字信号处理的一个新领域，具有强大的生命力，对它的研究成果可能对信号处理领域产生重大的影响。

参 考 文 献

[1] Do0noho D. Compressed sensing[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.

- [2] Candès E, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Trans. Information Theory. 2006, 52(4): 489-509.
- [3] Candès E, Tao T. Near optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies[J]. IEEE Trans. Information Theory, 2006, 52(12): 5406-5425.
- [4] Kashin B. The widths of certain finite dimensional sets and classes of smooth functions[J]. Izv Akad Nauk SSSR. 1997, 41(2): 334-351.
- [5] 石光明. 压缩感知理论及其研究进展. 电子学报[J]. 2009, 37(5): 1070-1080.
- [6] Vivek K Goyal, Alyson K. Fletcher, Sundeep Rangan. Compressive sampling and lossy compression[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 48-56.
- [7] 李坤, 马采文, 李艳. 压缩感知重构算法综述[J]. 红外与激光工程, 2013, 42(z1).
- [8] 刘兵, 付平, 孟升东. 基于正交匹配感知信号检测算法[J]. 仪器仪表学报, 2010, 32(9).

• 简 讯 •

Roland专业音视频新技术研讨会在上海召开

为了促进电声技术的学术交流,推介专业音视频(AV)数字化、网络化的最新技术成就,上海市声学学会电声专业委员会和上海乐兰电子有限公司,于2013年12月11日在宁国路25号、温德姆酒店三楼上海厅,联合主办了“Roland专业音视频新技术研讨会”。会上由上海乐兰电子有限公司多为技术人员阐述 REAC(Rpland 以太网音频传输)网络技术,它基于以太网,使用简便的 Cat5e/6 类网线,将多个设备构成低延时、高质量的数字音频传输和混音系统。会上着重介绍了新近推出多种现场演出的 Roland 数字调音台,并详细讲解了多格式高清视频切换台以及高清/标清多种信号转换器等。

参加这次会议有上海市声学学会秘书长龚农斌教授、常务理事尹雷总经理、电声专业委员会主任梁华教授,以及上海市声学学会的会员、专家和教授等,还有许多从事专业音响和影视演出行业的设计人员和工程技术人员,以及从事智能建筑弱电系统设计的工程技术人员、集成公司的经理等,共计 80 多人。这次会议内容新颖,反映热烈,效果良好,受到了与会者的好评。

同济大学声学研究所 梁华