

# 固体粘接界面的非线性共振特性研究

滕旭东<sup>1,2</sup>, 孙健明<sup>1</sup>, 肖齐<sup>1</sup>, 郭霞生<sup>1</sup>, 章东<sup>1</sup>

(1. 近代声学教育部重点实验室, 南京大学声学研究所, 江苏南京 210093; 2 上海工程技术大学, 上海 201620)

**摘要:** 研究考虑粘接界面非线性的条件下, 双层固体粘接薄板的振动特性。将双层板间的振动耦合看作一组非线性弹簧, 理论上运用分离变量等数学方法, 求解得到粘接层的应力应变关系为线性条件下的解析解, 以及考虑非线性参量时系统共振的数值解。通过对双层铝板的环氧树脂粘接模型进行仿真研究分析, 发现界面的共振频率随着界面粘接强度非线性参量的增加呈现先增大后减小的趋势, 当界面强度弹性参量为  $300\text{GN/m}^3$  时, 共振频率的最大偏移量达到 10%。在粘接强度退化早期, 利用界面的非线性共振特性可以更好地检测粘接质量。

**关键词:** 非线性; 粘接界面; 共振

中图分类号: TB559

文献标识码: A

文章编号: 1000-3630(2014)-02-0104-04

DOI 编码: 10.3969/j.issn1000-3630.2014.02.002

## Characterization of nonlinear resonance between bonded solid interfaces

TENG Xu-dong<sup>1,2</sup>, SUN Jian-ming<sup>1</sup>, XIAO Qi<sup>1</sup>, GUO Xia-sheng<sup>1</sup>, ZHANG Dong<sup>1</sup>

(1. Key Laboratory of Modern Acoustics, Institute of Acoustics, Nanjing University, Nanjing 210093, Jiangsu, China;

2. Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 201620, China)

**Abstract:** In this paper, the vibration characteristics of bonded double plate system depending on the nonlinear bonding condition are studied. The coupling between the plates is described with a group of springs with nonlinear stress-strain behavior. With the help of mathematical methods such as separation of variables, analytical and numerical solutions are obtained for the system resonance. Numerical simulation is performed for a two-layer aluminum plate system, and the resonance frequency is found to vary with the nonlinear elastic coefficient of the adhesive, behaving first increase then decrease with the growing nonlinear coefficient. The maximum deviation of resonance frequency is found to be about 10% in the case of linear elastic coefficient= $300\text{GN/m}^3$ . It is thus concluded that, the nonlinear behavior of adhesive could be utilized for the early detection of bonding failure.

**Key words:** nonlinear; bonded plates; resonance

## 0 引言

粘接技术在现代工业中得到了广泛的应用。该技术采用粘接剂将多种材料相互粘合, 具有工艺简单、强度高、节约原材料和劳动力等优点。对于不同材料的粘接, 需要选用不同的粘接剂以及粘接质量控制技术。粘接剂的选用不当、粘接表面的处理技术不过关等因素可能造成粘接强度的下降, 因而可能成为工业过程中的安全隐患。为保证粘接体的机械强度与稳定性, 必须对粘接好的工件和部件进行粘接质量的测试。因而粘接质量的检测和评价技术备受关注。

粘接质量的检测通常分为两大类: 一类是脱粘缺陷的检测, 另一类是粘接强度的检测。声振动检测法在粘接检测中发展较早且应用较为广泛。当前工业应用中具体的方法主要包括耐久性试验(如拉伸强度测试、疲劳强度测试和蠕变检测等)、红外检测<sup>[1]</sup>和各类声学检测方法。红外检测一般更常见于成型的裂纹, 而对于弱粘接界面则很难反映。相比于耐久性试验, 超声检测方法不破坏试件, 因而更加经济; 同时, 由于超声检测效率更高, 可应用于线上实时检测。然而现有的超声检测手段(如脉冲回波法)也有一些缺点, 如对于弱粘接界面的检测灵敏度较差。声阻法是声学方法中最具有影响力的方法之一, 是在敲击法基础上发展起来。另外, 国内外针对粘接问题也开展了许多有关声学检测方法的研究<sup>[2-6]</sup>。

粘接结构的胶层厚度一般比较薄, 在很多情况

收稿日期: 2013-03-22; 修回日期: 2013-06-02

基金项目: 江苏省自然科学基金(BE2011110)、江苏高校优势学科建设工程资助项目。

作者简介: 滕旭东(1971—), 男, 上海人, 博士, 研究方向为声学。

通讯作者: 章东, E-mail: dzhang@nju.edu.cn

下胶层的力学行为可以采用弹簧模型描述。近年来，线性弹簧模型在超声波对粘接界面进行评价方面有着广泛的应用<sup>[7-11]</sup>。然而，在界面退化的早期，线性参量的变化是不明显的，而非线性参量往往具有更高的灵敏度，更能准确描述界面的性质。

本文研究双层粘接薄板的非线性共振特性。理论上给出了非线性共振的数值解和解析解，采用双层铝板的环氧树脂粘接模型进行了数值计算，讨论了系统的共振随线性及非线性参量的变化，为进一步采用非线性超声方法评价粘接界面性质提供理论依据。

### 1 理论方法

如图 1 所示，两块平面薄板，长和宽分别为  $a_1$ 、 $a_2$  和  $b_1$ 、 $b_2$ ；密度分别为  $\rho_1$  和  $\rho_2$ ；厚度分别为  $h_1$ 、 $h_2$ 。在粘接剂的连接下，两块板间的振动传递可以考虑为由胡克定律所描述的一组弹簧的作用，系统振动的微分方程组为

$$\begin{cases} c_1^2 \nabla^2 w_1(x, y, t) - \frac{\partial^2 w_1(x, y, t)}{\partial t^2} - F_0 = 0 \\ c_2^2 \nabla^2 w_2(x, y, t) - \frac{\partial^2 w_2(x, y, t)}{\partial t^2} + F_0 = 0 \\ F_0 = c(x, y)[w_1(x, y, t) - w_2(x, y, t)] + b(x, y)[w_1(x, y, t) - w_2(x, y, t)]^2 \end{cases} \quad (1)$$

式中： $F_0$  为弹簧所提供的弹性力； $w_1(x, y, t)$  和  $w_2(x, y, t)$  分别为板 1、板 2 与粘接剂接触界面的横向位移函数； $c_1$  和  $c_2$  为波速； $c(x, y)$  和  $b(x, y)$  分别为弹簧的线性劲度系数和非线性劲度系数，这里分别将其定义为界面强度的线性参量和非线性参量。

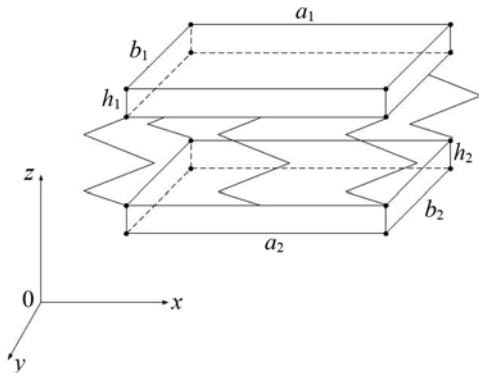


图 1 固体粘接界面模型  
Fig.1 Model of bonded solid interfaces

若假设在板 1 的上表面施加一个垂直方向( $z$  方向)上的振动激励，则波动会通过粘接剂(弹簧组)传递到板 2。假设板材料是各向同性且为线弹性的，则两块板的运动满足如下运动学方程：

$$\begin{aligned} \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 w_1(x, y, t)}{\partial t^2} + D_1 \Delta \Delta w_1(x, y, t) - c(x, y)[w_2(x, y, t) - w_1(x, y, t)] = b(x, y)[w_2(x, y, t) - w_1(x, y, t)]^2 \\ \rho_2 h_2 \frac{\partial^2 w_2(x, y, t)}{\partial t^2} + D_2 \Delta \Delta w_2(x, y, t) + c(x, y)[w_2(x, y, t) - w_1(x, y, t)] = -b(x, y)[w_2(x, y, t) - w_1(x, y, t)]^2 \end{aligned} \quad (2)$$

其中， $D_i = \frac{E_i h_i^3}{12(1-\nu_i^2)}$ ； $\Delta \Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ ； $E_i$  为板的弹性模量； $\nu_i$  为板的泊松比。

方程(2)中的位移函数  $w_1(x, y, t)$  和  $w_2(x, y, t)$  均为时间和位置相关，可以应用分离变量法将其分解为位置函数  $W_{(i)}(x, y)$  和时间函数  $T_{(i)}(t)$ ，这里  $i=1, 2$ ，分别对应于板 1 和板 2，在下文所有方程中均如此定义。对于矩形板，可以假设

$$w_i(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{(i)nm}(x, y) T_{(i)nm}(t) \quad (3)$$

其中， $n$  和  $m$  为表示不同振动模态的下标，其不同组合对应于方程的不同本征值。时间函数  $T_{(i)}(t)$  可以由式(4)描述(为统一起见，本文用  $\dot{T}$  和  $\ddot{T}$  分别表示时间函数的一阶和二阶时间导数)：

$$\begin{cases} \ddot{T}_{(1)nm}(t) + \omega_{(1)nm}^2 T_{(1)nm}(t) - a_{(1)}^2 T_{(2)nm}(t) - b_{(1)}^2 T_{(2)nm}^2(t) = 0 \\ \ddot{T}_{(2)nm}(t) + \omega_{(2)nm}^2 T_{(2)nm}(t) - a_{(2)}^2 T_{(1)nm}(t) - b_{(2)}^2 T_{(1)nm}^2(t) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

为方便计算，可进行如下变换

$$\omega_{(i)nm}^2 = k_{(i)nm}^4 c_{(i)nm}^4 + a_{(i)nm}^2; k_{(i)nm}^2 = k_{nm}^2 = [(\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2]$$

$$a_{(i)}^2 = \frac{c(x, y)}{\rho_i h_i}; b_{(i)}^2 = \frac{b(x, y)}{\rho_i h_i}; c_{(i)}^2 = \frac{D_i}{\rho_i h_i}$$

当  $b_{(i)}=0$  时，上述方程退化到线性情形，此时由式(4)可得出线性情形下的本征频率为<sup>[12]</sup>

$$\tilde{\omega}_{nm(1,2)} = \left\{ \frac{\{k_{(1)nm}^4 [c_{(1)}^4 + c_{(2)}^4] + a_{(1)}^2 + a_{(2)}^2\}}{2} \mp \sqrt{\frac{\{k_{(1)nm}^4 [c_{(1)}^4 - c_{(2)}^4] + a_{(1)}^2 - a_{(2)}^2\} + 4a_{(1)}^2 a_{(2)}^2}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

线性情况下本征频率解有两组解，其中一组对应于亚谐共振。在直角坐标系中，使用矩形板作为研究对象，矩形板满足的边界条件为

$$\frac{\partial^2 w_i(x, y, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_i(x, y, t)}{\partial y^2} = 0 \quad x=0; x=a; y=0; y=b$$

当  $x=0$  时， $w_i(0, y, t)=0$ ； $x=a$  时， $w_i(a, y, t)=0$ ；当  $y=0$  时， $w_i(x, 0, t)=0$ ；当  $y=b$  时， $w_i(x, b, t)=0$

根据边界条件，在直角坐标系中式(3)可以表示为<sup>[13]</sup>：

$$w_{(i)}(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{(i)nm}(t) \sin(\frac{m\pi}{a} x) \sin(\frac{n\pi}{b} y) \quad (6)$$

$$T_{(i)nm}(t) = A_{(i)nm} \cos(\tilde{\omega}_{nm} t + \alpha_{nm}) \quad (7)$$

由式(7)所描述的双层板系统的本征函数可以看出, 对应每个  $m$  和  $n$  都有与之相对应的本征频率  $\tilde{\omega}_{nm(1,2)}$ , 也就有了与之相对应的振动函数  $w_{(i)}(x, y, t)$ 。

前面已经导出了线性条件下界面共振频率的解析解。但在非线性的情况下, 本文采用数值解。采用微扰法, 假设

$$\begin{cases} T'_{(1)nm} = T_{(1)nm} + T_{(11)nm}; & T'_{(1)nm} = T_{(10)nm} + T_{(11)nm} \\ T'_{(2)nm} = T_{(2)nm} + T_{(21)nm}; & T'_{(2)nm} = T_{(20)nm} + T_{(21)nm} \end{cases} \quad (8)$$

式(8)中,  $T_{(11)nm}$  和  $T_{(21)nm}$  为对应的非线性一级修正项。

代入方程(4)展开, 并略去高阶小项, 可以得出非线性振动时间项的函数方程组为

$$\begin{cases} \ddot{T}_{(10)nm}(t) + \omega_{(1)nm}^2 T_{(10)nm}(t) - a_{(1)}^2 T_{(20)nm}(t) - b_{(1)}^2 T_{(20)nm}^2(t) = 0 \\ \ddot{T}_{(20)nm}(t) + \omega_{(2)nm}^2 T_{(20)nm}(t) - a_{(2)}^2 T_{(10)nm}(t) - b_{(2)}^2 T_{(10)nm}^2(t) = 0 \\ \ddot{T}_{(11)nm}(t) + \omega_{(1)nm}^2 T_{(11)nm}(t) - a_{(1)}^2 T_{(21)nm}(t) - 2b_{(1)}^2 T_{(20)nm} T_{(21)nm}(t) = 0 \\ \ddot{T}_{(21)nm}(t) + \omega_{(2)nm}^2 T_{(21)nm}(t) - a_{(2)}^2 T_{(11)nm}(t) - 2b_{(2)}^2 T_{(10)nm} T_{(11)nm}(t) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

由上述方程组直接采用数值解, 即可分析双层粘接板的共振特性。

## 2 数值计算

数值计算中采用双层铝板的环氧树脂粘接模型, 计算中所取的材料与几何参数如表 1 所示。对于仅考虑界面强度为线性条件的情形, 直接根据式(5)计算解析解; 在考虑非线性参量之后, 采用四阶龙格-库塔法(Runge-Kutta)对方程组(9)进行数值求解。为了研究系统的共振特性, 在板 1 上施加一个理想冲激脉冲激励, 此时系统的稳态解即为自由振动。本文主要研究系统的非线性对于共振的影响, 因此暂不考虑激励幅度变化。事实上, 在线性系统中, 自由振动的频率由振动系统自身条件所决定, 与振幅无关; 而对于非线性系统, 这种状况可能发生改变, 如非经典非线性中裂纹导致的共振频率偏移。

表 1 模型中所取的材料与几何参数<sup>[14]</sup>  
Table 1 Parameters of materials in modeling

材料	密度 $\rho / (\text{kg/m}^3)$	弹性模量 $E / \text{GPa}$	泊松比 $\nu$	厚度 $h / \text{m}$
铝	2700	71.7	0.33	0.01~0.04
环氧树脂	1100	4.56	0.21	0.02

首先需要考虑的是系统在完全线性的条件下的共振特性, 此时系统的共振频率可能与板材的尺寸( $a_i, b_i, h_i$ )、材料( $\rho_i, c_i$ )及界面强度的线性参量  $c$  相关。图 2 给出了铝板厚度分别为 0.01、0.02、

0.04 m 的情形下, 系统的线性共振频率随线性参量的变化。在所有情形中, 随着等效弹簧劲度系数的增加, 即粘接剂强度变大, 系统的共振频率都呈现减小的趋势。当线性参量增加到  $250 \text{ GN/m}^3$  以上时, 共振频率的变化变得较为缓慢, 例如厚度为 0.04 m 的板在线性参量从  $250 \text{ GN/m}^3$  增加到  $400 \text{ GN/m}^3$  时, 线性共振频率只减小了约 0.03 MHz; 而该板在线性参量由  $50 \text{ GN/m}^3$  增加到  $100 \text{ GN/m}^3$  时, 共振频率变化较为剧烈, 达到 0.4 MHz。

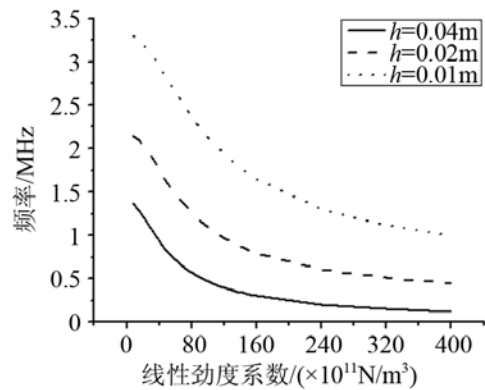


图 2 线性劲度系数对共振频率产生的影响  
Fig.2 Effect of linear coefficient on linear resonance

当系统由线性振动转化为非线性问题时, 双层粘接板的共振频率除了取决于材料、几何结构与线性参量之外, 还可能受到界面强度非线性参量的影响。图 3 表示了线性参量在三种不同的取值条件下 ( $300、350、400 \text{ GN/m}^3$ ), 系统的共振频率随非线性参量的变化而发生的改变。在三种情形下, 这种变化关系都呈现出先增加后减小的趋势, 例如当  $c=300 \text{ GN/m}^3$ , 共振频率在非线性参量小于  $5 \times 10^{12} \text{ N/m}^3$  的时候递增, 而当非线性参量大于  $5 \times 10^{12} \text{ N/m}^3$  的时候, 共振频率随着非线性参量递减。此外, 对比三种情形可以发现, 三条曲线的峰值所对应的非线性参量  $b$  的取值也随着线性参量  $c$  的变大而增加。需要说明的是, 由于非线性参量的存在, 共振

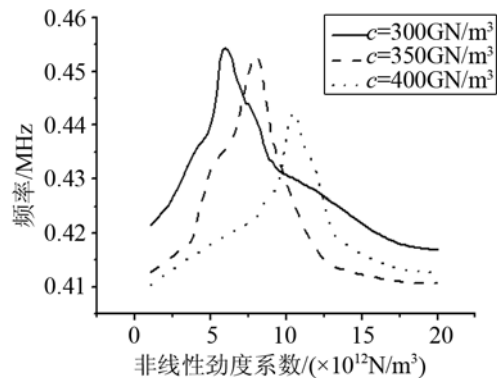


图 3 非线性劲度系数对共振频率产生的影响  
Fig.3 Effect of nonlinear coefficient on the nonlinear resonance

频率的变化范围约为 0.4 MHz, 也就是共振频率变化了 10%。

在图 2 中可以发现, 当界面强度的线性参量  $c$  为无穷大时, 由于横向相互作用未被考虑, 因而计算结果与两倍厚度单层板是不一致的。此处必须指出的是, 本文中考虑的是一个相对简化的模型, 即仅考虑两块板间纵向振动的传递。实际上如要完整地考虑该问题, 应该加入横向应力传递项, 这将是后续研究中的内容。

在粘接强度退化过程中, 粘接界面强度的线性参量会发生退化, 而在退化的早期, 如图 2 中线性参量较大的区域, 共振频率的变化速率是比较慢的, 很难进行有效的检测。特别是对于某些情形下, 粘接剂的失效可能不会导致线性参量的明显变化, 此时利用线性共振频率进行粘接质量的检测就显得无能为力。而在大多数情形下, 粘接质量的退化是与粘接层的非线性弹性相关的, 因此利用非线性效应对早期粘接退化进行共振检测是一种很好的方法。实际上, 在现实情形中, 粘接板系统的共振频率变化可能是由于界面强度线性参量的改变造成的, 也可能来源于非线性参数的变化。因此将线性共振与非线性共振理论结合起来, 将能够实现对于板材粘接质量的更为准确的预测。

### 3 结 语

本文从理论上分析了双层粘接板的振动特性, 分别给出了考虑界面强度的线性和非线性参量的条件下, 板共振的数值解和解析解, 对非线性弹簧模型的振动进行了数值和理论上的分析。数值分析和理论分析证明了: 材料板的共振频率是随着界面强度的线性参量递减的, 而非线性参量会使得共振频率有个极大值。非线性参量的存在对材料的共振频率也有较大的影响, 这就对测量的精度有了更高的要求。由于在早期, 界面强度的线性参量的变化不明显, 而非线性参量比较明显, 因而可以通过对非线性参量的测量来评价界面的粘接质量, 因此非线性共振分析对于粘接面的评价具有较强的实际意义, 而将线性与非线性方法相结合, 必将进一步促进评价粘接质量共振技术的发展。

### 参 考 文 献

[1] 杨正伟, 张炜, 武翠琴, 等. 导弹发动机壳体粘接质量红外热波检

- 测[J]. 仪器仪表学报, 2010, 31(12): 2781-2787.  
 YANG Zhengwei, ZHANG Wei, WU Cuiqin, et al. Infrared thermography applied to evaluate adhesive quality of missile motor shell[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2010, 31(12): 2781-2787.
- [2] 安志武, 王小民, 毛捷, 等. 粘接件拉伸强度的超声检测实验研究[J]. 声学学报, 2011, 36(4): 384-388.  
 AN Zhiwu, WANG Xiaomin, MAO Jie, et al. Experimental research on tensile strength of bonding structure by ultrasonics[J]. Acta Acustica, 2011, 36(4): 384-388.
- [3] 张祥迎, 谢凯文, 姜迎春. 复合材料板-板粘接结构超声检测[J]. 无损探伤, 2011, 35(4): 18-23.  
 ZHANG Xiangying, XIE Kaiwen, JIANG Yingchun. Ultrasonic testing of bonded composite plates[J]. NDT, 2011, 35(4): 18-23.
- [4] 李明轩. 粘贴质量超声检测研究[J]. 应用声学, 2002, 21(1): 7-12.  
 LI Mingxuan. Ultrasonic testing of adhesion[J]. Applied Acoustics, 2002, 21(1): 7-12.
- [5] 徐猛. 粘接层厚度对粘接质量超声检测的影响分析[J]. 兵器材料科学与工程, 2008, 31(3): 62-65.  
 XU Meng. Effect of adhesive layer's thickness on ultrasonic testing of adhesion quality[J]. Ordnance Material Science and Engineering, 2008, 31(3): 62-65.
- [6] AN Z W, WANG X M, LI M X. Nonlinear effects of an acoustic wave on a sold plate[C]// Proceeding of 10<sup>th</sup> Western Pacific Acoustics Conference, Beijing, 2009.
- [7] LI M X, WANG X M, MAO J. Thickness measurement of a film on a substrate by low-frequency ultrasound[J]. Chin. Phys. Lett., 2004, 21(5): 870-873.
- [8] Elena M, Inna S, Sergiy B, et al. Acoustical methods for the investigation of adhesively bonded structures: A review[J]. Canadian Journal of Physics, 2004, 82(12): 981-1025.
- [9] 王小民, 李明轩, 毛捷, 等. 单层与衬底胶接结构超声反射波谱的低频特征[J]. 声学学报, 2005, 30(4): 337-342.  
 WANG Xiaomin, LI Mingxuan, MAO Jie. Low-frequency features of the ultrasound echo from an adhesively bonded layer-substrate structure[J]. Acta Acustica, 2005, 30(4): 337-342.
- [10] 邓明晰. 弱界面分层结构中的非线性兰姆波[J]. 声学学报, 2006, 32(3): 205-211.  
 DENG Mingxi. Nonlinear lamb wave propagation in layered planar structures[J]. Acta Acustica, 2006, 32(3): 205-211.
- [11] Delsanto P E, Scalerandi M A. Spring model for the simulation of the propagation of ultrasonic pulses through imperfect contact interfaces[J]. J. Acoust. Soc. Am., 1998, 104(5): 2584-2591.
- [12] Hedrih (Stevanović) K. Transversal vibrations of double-plate systems[J]. Acta Mech Sinica, 2006, 22(5): 487-501.
- [13] Hedrih (Stevanović) K. Double plate system with a discontinuity in the elastic bonding layer[J]. Acta Mech Sinica, 2007, 23: 221-229.
- [14] 安志武, 王小民, 毛捷, 等. 粘接界面的非线性弹簧模型及实验验证[J]. 声学学报, 2010, 35(5): 481-487.  
 AN Zhiwu, WANG Xiaomin, MAO Jie. Theoretical and experimental research on nonlinear spring models of a bonding interface[J]. Acta Acustica, 2010, 35(5): 481-487.