

水中板声辐射的声功率模态分析

李 直¹, 黎 胜¹, 刘彦森²

(1. 大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁大连 116024; 2. 水下测控技术重点实验室, 辽宁大连 116013)

摘要: 由于水中结构的振动声辐射要考虑流体加载效应, 因此水中结构声辐射的模态分析与空气中的有所不同。基于辐射声功率的二次型表达式, 采用有限元和 Rayleigh 积分耦合方法, 对板结构的水下声功率模态进行了计算分析研究, 通过辐射效率、模态振型和辐射声功率等探讨了其特点。结果表明以激励力为变量、考虑了结构阻抗的水下声功率模态具有各阶模态声辐射独立、低频时前几阶模态(特别是第 1 阶模态)的声辐射占主导地位、模态辐射效率峰值和模态振型物理意义清楚等特点, 在水下结构振动声辐射的分析和控制方面有一定实用价值。

关键词: 水下声辐射; 模态分析; 声功率模态; 振动模态

中图分类号: TB532

文献标识码: A

文章编号: 1000-3630(2014)-04-0317-05

DOI 编码: 10.3969/j.issn1000-3630.2014.04.006

Acoustic power-mode analysis of sound radiation from underwater plate

LI Zhi¹, LI Sheng¹, LIU Yan-sen²

(1. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, Liaoning, China;

2. Key Laboratory for Underwater Test and Control Technology, Dalian 116013, Liaoning, China)

Abstract: Because of fluid loading, the modal analysis of sound radiation of underwater structure is different from that in air. The modal analysis of sound radiation from an underwater plate is carried out by using coupled finite element /Rayleigh integral method. The expressions of acoustic power modes are obtained based on the quadratic form of acoustic power. The characteristics of the acoustic power modes are compared in their radiation efficiencies, mode shapes and radiated power contributions. The numerical results show that the acoustic power modes expressed by the excitation force have the advantages in taking account of the structural impedance, no modal coupling of sound radiation between modes, the first few modes (especially the first mode) dominating the total sound radiation, direct physical explanations of the mode shapes and the peak values of the mode-radiation efficiency. So, the acoustic power-mode analysis is more favorable in analysis and control of sound radiation from underwater structure.

Key words: underwater acoustic radiation; modal analysis; acoustic power modes; vibration modes

0 引 言

结构的振动声辐射研究因对舰船噪声控制具有重要意义, 一直以来都是比较受重视的课题, 也取得了很多成果。结构的振动声辐射可以在模态空间中考察^[1-6]。在振动模态下, 各阶振动模态对声辐射的贡献是不独立的, 相互之间存在耦合, 结构的辐射声功率可以表达为各阶振动模态自身贡献和各阶振动模态耦合贡献的和。在声辐射模态下, 结构表面的振动被分解成一组声辐射独立的速度分

布, 结构的辐射声功率可以表示为各阶声辐射模态速度幅值的平方与相应特征值乘积的和, 即各阶声辐射模态对辐射声功率的贡献是独立的。毛崎波、姜哲^[7,8]基于声辐射模态研究了结构噪声的有源控制以及声功率确定。李双、陈克安^[9]研究了结构振动模态和声辐射模态之间的对应关系, 并对其有效性和实用性进行了验证。黎胜等^[10]采用数值方法对结构振动声辐射的振动模态分析和声辐射模态进行了分析和比较。在声辐射模态基础上, Tanaka N 和 Snyder SD 等^[11]还提出以模态位移为变量来表达声功率, 即将结构的辐射声功率表示为各阶模态位移幅值的平方与相应特征值乘积的和, 称之为声功率模态, 并将其应用于结构声辐射控制。由于振动模态、声辐射模态以及 Tanaka 等提出的声功率模态均是通过某一模态变量来表达辐射声功率: 振动模态以振动模态速度来表达声功率, 声辐射模态以声

收稿日期: 2013-02-05; 修回日期: 2013-05-28

基金项目: 国家安全重大基础研究项目(6131221011)、中央高校基本科研业务费专项资金项目(DUT13ZD(G)03)

作者简介: 李直(1986-), 男, 江苏徐州人, 硕士研究生, 研究方向为结构振动声辐射分析与控制。

通讯作者: 黎胜, E-mail: shengli@dlut.edu.cn

辐射模态速度来表达声功率, Tanaka 提出的声功率模态以模态位移来表达声功率。因此研究声辐射的这三种模态实际上可统称为声功率模态。由于结构的振动与声辐射实际上是直接由激励力作用于结构引起的, 研究以力为变量的声功率模态对声辐射控制而言更具指导意义, 李直等^[12]研究了以模态力来表达辐射声功率的声功率模态。

上述结构振动声辐射的模态分析研究工作都是针对空气中结构振动声辐射进行的, 对舰船结构振动与声辐射的研究而言, 更有意义和更重要的工作应该是对结构水下振动与声辐射的研究。如所知, 对水下结构的振动模态分析可以得到水下结构共振频率, 也可以得到相应的水下振动模态振型, 而且该振动模态振型相对结构而言是实际存在的, 故可以直接根据共振频率和振型来考虑振动声辐射控制。但水下各阶振动模态的声辐射不独立、存在耦合, 又给声辐射控制带来一定困难。声辐射模态实际上是数学变换后所得到的模态, 其优点是声辐射独立和第一阶模态在低频时占主导地位, 这样在进行声辐射控制时控制机理简单, 只需对第一阶模态进行控制即可, 但声辐射模态分析不能得到其共振频率信息, 而且其模态振型相对结构而言并不是实际存在的, 需要经过变换, 因此使用声辐射模态在指导声辐射控制实施和实际应用时相对来说并不是很直接。本文采用有限元法和 Rayleigh 积分耦合方法对水下结构振动声辐射进行了以模态力为变量的声功率模态分析, 以水中矩形筒支板为例进行了计算分析研究。

1 水中结构声辐射的声功率模态分析理论

水中结构在简谐激励力作用下, 考虑流体加载效应的有限元形式的运动方程为:

$$[D_1]\{\mathbf{v}\}=\{\mathbf{f}\}-[G][A]\{\mathbf{p}\} \quad (1)$$

式中: $[D_1]=(-\omega^2[M]+i\omega[C]+[K])/i\omega$ 为结构阻抗矩阵, ω 为激励圆频率; $[M]$ 、 $[C]$ 和 $[K]$ 分别为结构的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵; $\{\mathbf{v}\}$ 为结构节点的速度向量; $\{\mathbf{f}\}$ 为外激励力向量; $[G]$ 为结构表面法向速度向量和结构速度向量之间的转换矩阵; $[A]=\int_s [N]^T [N] dS$ 为结构湿表面面积矩阵, $[N]$ 为形状插值函数矩阵; $\{\mathbf{p}\}$ 为结构表面声压向量。

结构表面声压和结构表面法向速度的关系可用边界元公式表示为:

$$\{\mathbf{p}\}=[Z]\{\mathbf{v}_n\} \quad (2)$$

式中: $[Z]$ 为声阻抗矩阵; $\{\mathbf{v}_n\}$ 为结构表面法向速度向量。对嵌在无限大障板中的平板结构, 式(2)通过对板表面 Rayleigh 积分进行离散得到。

结构表面法向速度向量和结构速度向量之间的转换关系为:

$$\{\mathbf{v}_n\}=[G]^T \{\mathbf{v}\} \quad (3)$$

将式(2)和式(3)代入式(1)可得:

$$[D]\{\mathbf{v}\}=\{\mathbf{f}\} \quad (4)$$

其中: $[D]=[D_1]+[G][A][Z][G]^T$ 。求出结构速度向量 $\{\mathbf{v}\}$ 后, 进而求出 $\{\mathbf{v}_n\}$ 和 $\{\mathbf{p}\}$ 等。

结构的辐射声功率 W 可由结构表面声压 $\{\mathbf{p}\}$ 和表面法向速度 $\{\mathbf{v}_n\}$ 通过式(5)求得:

$$W=\frac{1}{2} \int_s \operatorname{Re}(p v_n^*) dS \quad (5)$$

式中: v_n^* 表示 v_n 的共轭复数, $\operatorname{Re}(\)$ 表示取实部。根据结构表面声压向量 $\{\mathbf{p}\}$ 和表面法向速度向量 $\{\mathbf{v}_n\}$ 的关系式, 式(5)可以表达为^[13,14]

$$W=\frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\{\mathbf{v}_n\}^H [A][Z]\{\mathbf{v}_n\}\}=\{\mathbf{v}_n\}^H [R]\{\mathbf{v}_n\} \quad (6)$$

式中: $[R]=[A]/2 \operatorname{Re}([Z])$ 为实对称矩阵。由于 $[A][Z]$ 为对称矩阵, 因此 $[R]$ 也是对称矩阵。又因为 $W>0 \forall v_n \neq 0$, 所以矩阵 $[R]$ 为正定矩阵。由于声阻抗矩阵仅与结构的几何尺寸和外部形状以及结构的激励频率相关, 面积矩阵 $[A]$ 仅与结构的几何尺寸和外部形状相关, 故矩阵 $[R]$ 与结构的几何尺寸、外部形状和激励频率相关。

由式(4)可得到

$$\{\mathbf{v}\}=[D]^{-1} \{\mathbf{f}\} \quad (7)$$

将式(7)代入式(3)可得:

$$\{\mathbf{v}_n\}=[G]^T [E]\{\mathbf{f}\} \quad (8)$$

其中: $[E]=[D]^{-1}$ 。

将式(8)代入辐射声功率的二次型表达式(6)可得:

$$W=(\{G\}^T [E]\{\mathbf{f}\})^H [R](\{G\}^T [E]\{\mathbf{f}\})=\{\mathbf{f}\}^H [T]\{\mathbf{f}\} \quad (9)$$

其中: $[T]=[E]^H [G][R][G]^T [E]$ 。此处 $[T]$ 为 Hermit 矩阵, 因此有:

$$[T]=[T_r]+i[T_i] \quad (10)$$

其中矩阵 $[T_r]$ 为矩阵 $[T]$ 的实部对应有功功率部分。由于 $[R]$ 为对称正定矩阵, 故 $[T_r]$ 也是对称矩阵; 又由于 $W>0 \forall f \neq 0$, 所以 $[T]$ 也是正定矩阵。因此必存在正交矩阵 $[Q]$ 和对角矩阵 $[\Psi]$, 使得:

$$[T_r]=[Q][\Psi][Q]^T \quad (11)$$

式中：对角矩阵 $[\Psi]$ 的对角元素 $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ 是 $[T]$ 的 N 个特征值，且均为正实数，正交矩阵 $[Q]$ 的 N 个列依次是相应的 N 个线性无关的特征向量(声功率模态振型)， N 为将结构表面离散后的自由度数。由于矩阵 $[T]$ 与矩阵 $[E]$ 、 $[R]$ 相关，而矩阵 $[E]$ 与结构的刚度阵和质量阵相关、矩阵 $[R]$ 与结构的几何尺寸、外部形状和激励频率相关，所以水下结构的声功率模态与结构的几何尺寸、外部形状、激励频率、边界条件和结构材料均相关。结构在空气和在水中的区别在于水中需要考虑流体加载，即水中的 $[T]$ 阵中包含流体附加阻抗部分。

式(9)又可以表示为：

$$W = \{f\}^H [T_r] \{f\} = \{f\}^H [Q][\Psi][Q]^T \{f\} = \{y\}^H [\Psi] \{y\} = \sum_{i=1}^N \lambda_i |y_i|^2 \quad (12)$$

式中：模态力向量 $\{y\}$ 是以 $[Q]^T$ 为变换矩阵对 $\{f\}$ 作线性变换而得到，即 $\{y\}=[Q]^T \{f\}$ 。可见，模态力向量的大小取决于声功率模态振型和激励力 $\{f\}$ 的大小。从式(12)可以看到，各阶声功率模态对辐射声功率的贡献是独立的，总的声功率等于各阶辐射声功率的和。 λ_i 为矩阵 $[T_r]$ 的各阶特征值，代表了各阶声功率模态声辐射能力的大小，各阶声功率模态的辐射效率可定义为

$$\sigma_i = 2\lambda_i / \rho c S_0 \quad (13)$$

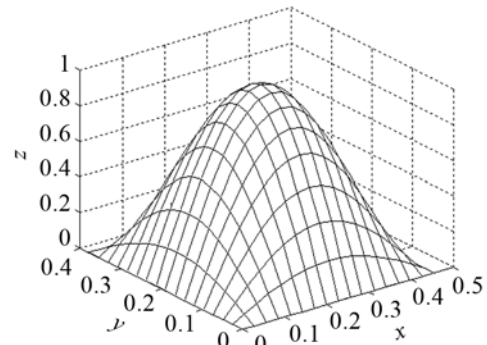
2 数值计算

以水中矩形平板进行计算分析，板长 $L_x=0.455$ m，板宽 $L_y=0.379$ m，板厚 $h=0.003$ m，板密度 $\rho_s=7850$ kg/m³， $E=2.1 \times 10^{11}$ N/m²， $\nu=0.3$ ，边界条件为四边简支，坐标系原点取在板中心，水密度 $\rho=1000$ kg/m³，声速 $c=1500$ m/s，空气密度 $\rho_0=1.21$ kg/m³，声速 $c_0=343$ m/s。参考声功率取为 10^{-12} W。计算中采用四边形四节点等参元对结构进行离散，网格为 16×16 ，其中有限元为基于Mindlin板弯曲理论的板元。结构离散后的有限元自由度数为 $N=803$ ，节点数为 $K=289$ 。表1列出了板在空气中和在水中的前10阶固有频率和振型。

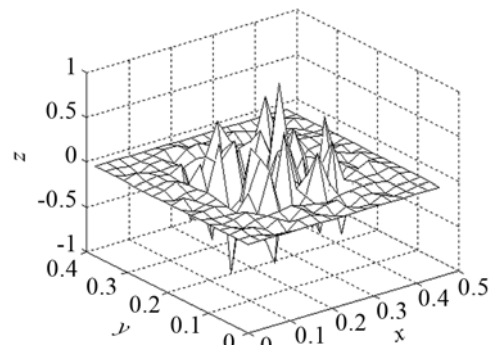
图1为30.5 Hz时的前二阶水中声功率模态振型图，图2为376.8 Hz时的前四阶水中声功率模态振型图。可见，声功率模态与激励频率密切相关，在30.5 Hz时仅激发了第1阶声功率模态，从图3~5可以看到该第1阶模态对声辐射的贡献占完全主导地位，第二阶及以后的模态振型均象图1(b)那样不规则(对声辐射的贡献可忽略)。随着激励频率的

表 1 板的固有频率和振型
Table 1 Natural frequencies and mode shapes of the plate

模态	1	2	3	4	5
	(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)	(3,1)
空气中频率/Hz	86.7	193.4	241.0	344.6	373.6
水中频率/Hz	30.5	94.0	121.7	193.7	210.4
模态	6	7	8	9	10
	(1,3)	(3,2)	(2,3)	(4,1)	(3,3)
空气中频率/Hz	501.3	519.7	600.0	631.2	766.7
水中频率/Hz	295.6	320.9	376.8	402.0	511.3



(a) 1 阶



(b) 2 阶

图 1 30.5 Hz 时的声功率模态振型图

Fig.1 The mode shapes of acoustic power modes at 30.5 Hz

升高，被激起的声功率模态增多。

图3给出了矩形钢板在垂向点力激励(力幅值 $F_0=1$ N)作用下，作用位置为 $(x_1, y_1)=(0.11375$ m, 0.09475 m)时，激励频率从10 Hz到550 Hz之间，分别取第1阶声功率模态和前3阶声功率模态进行计算得到的水中辐射声功率曲线 W_1 和 W_3 ，以及取全部声功率模态进行计算得到的声功率曲线 W 。可以看到，取第1阶声功率模态进行计算得到的辐射声功率在图中的整个频段内除在170 Hz、275 Hz附近和500 Hz以后不准确外，其它都是比较精确的。取前3阶声功率模态进行计算时，在每一阶固有频率处都是比较精确的。另外，由于各阶声功率模态对声功率的贡献是独立的，因此对结构声辐射进行声辐射模态控制的控制机制是明显的。由图中

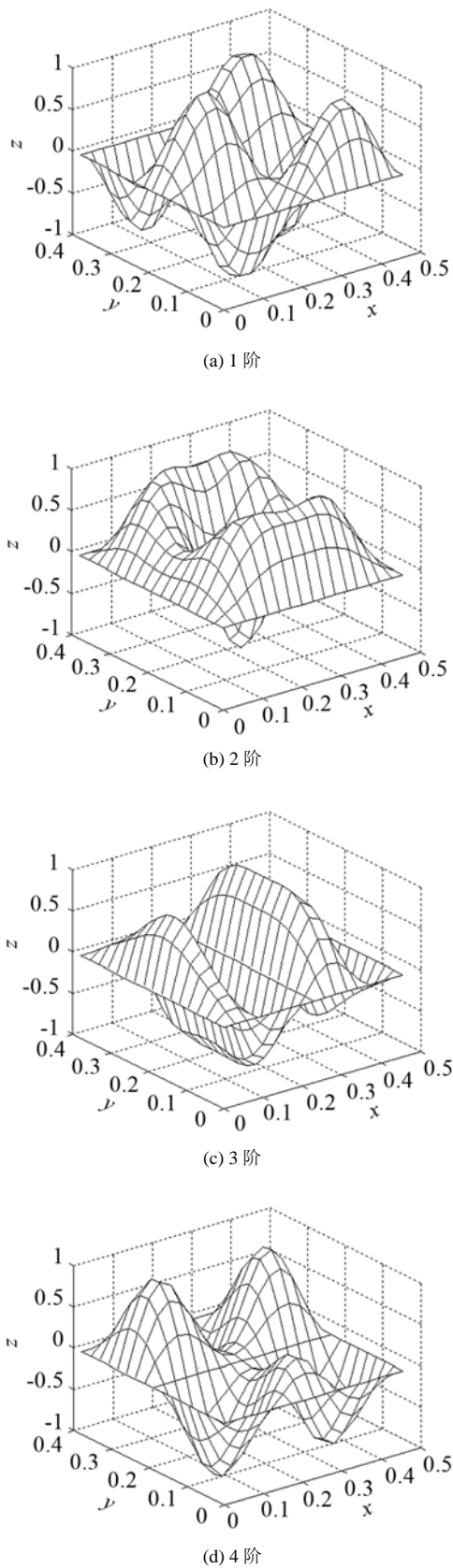


图2 376.8 Hz 时的声功率模式振型图

Fig.2 The mode shapes of acoustic power modes at 376.8 Hz

可知，第 1 阶模式的辐射声功率占有较大的比重，特别是在低频的时候，第 1 阶模式的辐射声功率要

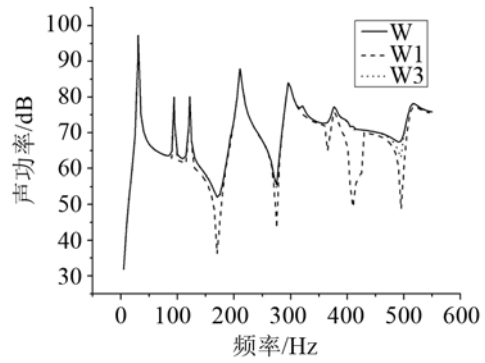


图3 声功率模式下的辐射声功率

Fig.3 The radiated power obtained by acoustic power modes

远远大于其它模式的辐射声功率，因此在控制的时候，只要对第 1 阶模式进行控制，就能达到很好的控制效果。

图 4 和图 5 分别为空气中和水下声功率模式的辐射效率图。由图中可以看出，与振动模式和声辐射模式的辐射效率不同的是：声功率模式的辐射效率在结构固有频率处有峰值，这是由于矩阵 $[T_r]$ 和结构阻抗 $[D]$ 相关。从图 4 和图 5 中还可以看到，在低频时，第 1 阶声功率模式的辐射效率远大于其它阶模式，随着激励频率的升高，各阶声功率模式辐射效率之间的差异呈缩小趋势，在 $(kL_x=10)$ 时，

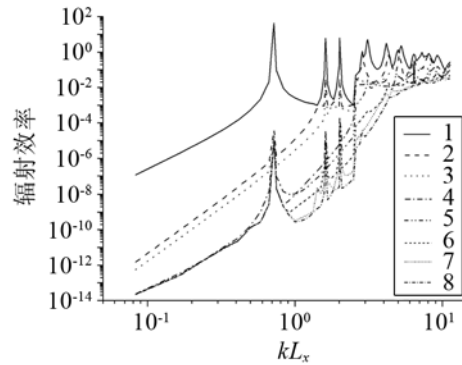


图4 空气中前 8 阶声功率模式的辐射效率

Fig.4 The radiation efficiencies of the first eight acoustic power modes for plate in air

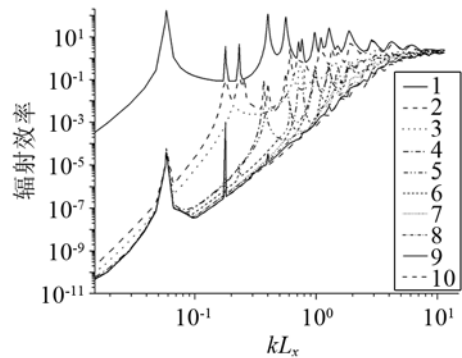


图5 水中前 10 阶声功率模式的辐射效率

Fig.5 The radiation efficiencies of the first ten acoustic power modes for plate in water

各阶辐射效率趋于一致。

从上面的计算分析可见, 声功率模态与振动模态和声辐射模态相比较而言, 其具有声辐射模态各阶模态声辐射独立和前几阶模态占主导地位(特别是第1阶模态)的优点, 又具有振动模态的振型实际存在、给出了共振频率信息的优点, 同时声功率模态以激励力为变量, 在指导声辐射控制实施和实际应用时比较直接、方便, 如可直接根据声功率模态振型来考虑激励力(或控制力)位置或是根据声功率模态声辐射效率峰值避开共振以降低声辐射。

3 结论

本文基于辐射声功率的二次型表达式, 利用有限元和 Rayleigh 积分耦合方法, 对板结构的水下声功率模态进行了计算分析研究。研究表明以激励力为变量、考虑了结构阻抗的水下声功率模态具有各阶模态声辐射独立、低频时前几阶模态(特别是第1阶模态)的声辐射占主导地位、模态辐射效率峰值和模态振型物理意义清楚等特点, 在水下结构振动声辐射的分析和控制方面有一定实用价值。

参 考 文 献

- [1] Fuller C R. Active control of sound transmission/radiation from elastic plates by vibrational inputs: I. Analysis[J]. *J. Sound Vib.*, 1990, **136**(1): 1-15.
- [2] Fuller C R, Elliott S J, Nelson P A. Active control of vibration[M]. San Diego: Academic Press: 1996.
- [3] Baumann W T, Saunders W R, Robertshaw H R. Active suppression of acoustic radiation from impulsively excited structures[J]. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1991, **88**(6): 3202-3208.
- [4] Cunefare K A. Effect of modal interaction on sound radiation from vibrating structures[J]. *AIAA Journal*, 1992, **30**(12): 2819-2828.
- [5] Borgiotti G V. The power radiated by a vibrating body in an acoustic fluid and its determination from boundary measurements[J]. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1990, **88**(4): 1884-1893.
- [6] Cunefare K A. The minimum multimodal radiation efficiency of baffled finite beams[J]. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1991, **90**(5): 2521-2529.
- [7] 毛崎波, 姜哲. 通过声辐射模态研究结构噪声的有源控制[J]. *江苏理工大学学报*, 2000, **21**(4): 1-6.
MAO Qibo, JIANG Zhe. A research on active structural acoustic control by radiation modes[J]. *Journal of Jiangsu University of Science and Technology*, 2000, **21**(4): 1-6.
- [8] 姜哲. 基于声辐射模态确定声功率[J]. *江苏大学学报(自然科学版)*, 2005, **26**(6): 537-541.
JIANG Zhe. Determination of acoustic power on acoustic radiation modes[J]. *Journal of Jiangsu University (Natural Science Edition)*, 2005, **26**(6): 537-541.
- [9] 李双, 陈克安. 结构振动模态和声辐射模态之间的关系及应用[J]. *声学学报*, 2007, **32**(2): 171-177.
LI Shuang, CHEN Kean. The relationship between acoustic radiation modes and structural modes and its application[J]. *Acta Acustica*, 2007, **32**(2): 171-177.
- [10] 黎胜, 赵德有. 结构声辐射的振动模态分析和声辐射模态分析研究[J]. *声学学报*, 2004, **29**(3): 200-208.
LI Sheng, ZHAO Deyou. Research on modal analysis of structural acoustic radiation using structural vibration modes and acoustic radiation modes[J]. *Acta Acustica*, 2004, **29**(3): 200-208.
- [11] Tanaka N, Snyder S D, Hansen C H. Distributed parameter model filtering using smart sensors[J]. *ASME Transactions, Journal of Vibration and Acoustics*, 1996, **118**(4): 630-640.
- [12] 李直, 黎胜, 刘彦森. 结构声辐射的声功率模态分析研究[J]. *中国舰船研究*, 2012, **7**(1): 35-40.
LI Zhi, LI Sheng, LIU Yansen. Analysis of structural acoustic radiation using acoustic power modes[J]. *Chinese Journal of Ship Research*, 2012, **7**(1): 35-40.
- [13] Elliott S J, Johnson M E. Radiation modes and the active control of sound power[J]. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1993, **94**(4): 2194-2204.
- [14] Johnson M E, Elliott S J. Active control of sound radiation using volume velocity cancellation[J]. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1995, **98**(4): 2174-2186.