

应用 Poisson 板理论求解 S0 兰姆波 在通孔缺陷的散射

张海燕¹, 姚杰聪¹, 马世伟²

(1. 上海大学通信与信息工程学院, 特殊光纤与光接入网省部共建重点实验室, 上海 200444;
2. 上海大学机电工程与自动化学院, 上海市电站自动化技术重点实验室, 上海 200072)

摘要: 为降低 3D 精确理论散射场求解的复杂性和计算成本, 应用 Poisson 板理论描述面内波模式, 给出了 S0 波在各向同性板中受通孔散射的近似模型。该理论利用波函数展开技术以及孔边缘的边界条件, 得到了 S0 和 SH0 模式的散射远场。将 Poisson 板理论与 3D 精确理论进行比较, 两者在低频情况下具有较好的一致性。考察了两个基本导波模式在不同尺寸孔的散射特性, 发现它们的散射波幅值在某些散射方向随孔径呈线性变换, 该结果为兰姆波无损评价提供了依据。

关键词: 兰姆波; Poisson 板理论; 散射; 无损评价

中图分类号: 0422

文献标识码: A

文章编号: 1000-3630(2014)-05-0387-06

DOI 编码: 10.3969/j.issn1000-3630.2014.05.001

Poisson plate theory for solving S0 Lamb wave scattering from a through hole

ZHANG Hai-yan¹, YAO Jie-cong¹, MA Shi-wei²

(1. School of Communication and Information Engineering, Key Laboratory of Specialty Fiber Optics and Optical Access Networks, Shanghai University, Shanghai 200072, China; 2. Shanghai Key Laboratory of Power Station Automation Technology, School of Mechatronic Engineering and Automation, Shanghai University, Shanghai 200072, China)

Abstract: To reduce the complexity and computational cost of solving scattering fields with the exact 3D model, an approximate model of S0 Lamb wave scattering from a through hole in isotropic plates is presented by using Poisson plate theory for describing in-plane wave modes. The model makes use of the wave function expansion technique and the boundary conditions at the edge of hole to obtain the far scattering fields of S0 and SH0 modes. Compared to the exact 3D model, the obtained results of Poisson model show a good agreement with those of the 3D model at low frequency. The scattering characteristics of two fundamental guided wave modes for the holes of different sizes are also explored. It is found that the scattering wave amplitudes at some scattering angles change linearly with the hole diameter, which provides a quantitative basis for Lamb wave non-destructive evaluation.

Key words: Lamb waves; Poisson plate theory; scattering; non-destructive evaluation

0 引言

因为兰姆波在(NonDestructive Testing, NDT)应用的潜力, 近年来波导中的散射问题受到相当大的关注。由于其复杂性, 所进行的研究主要是应用数值方法如有限元法(Finite Element Method, FEM)^[1]或边界元法(Boundary Element Method, BEM)^[2]。虽然二维(2D)研究能够部分洞察兰姆波与缺陷之间的

相互作用, 为了全面地理解散射过程, 3D 建模是必须的。尽管计算能力和效率不断提高, 数值方法仍然需要相当高的计算代价。即使高性能计算机, 对一个特定的入射波场, 计算时间也是几个小时的数量级。而解析或半解析解对这样的问题是适用的, 能够快速仿真众多不同散射体的散射。对于 2D 问题, 解析解方法已用于研究兰姆波遇圆形腔体^[3]或裂纹^[4]的散射。对于 3D 问题, 寻求解析解相当复杂。虽然瑞利-兰姆波解是精确的, 然而, 它在表征兰姆波与结构缺陷的作用时相当困难, 因为在无限多的模式中, 需要考虑模式耦合的影响^[5-8]。即使激发频率低于第一阶模式的截止频率(也即仅有一个传播模式), 近场波高阶模式^[9]在缺陷与周围结构的界面上也参与模式转换过程^[10]。Grahn^[6]采用双级数

收稿日期: 2014-04-25; 修回日期: 2014-08-13

基金项目: 国家自然科学基金(11074164, 11274226, 61171145)资助项目。

作者简介: 张海燕(1970—), 女, 山东曹县人, 博士, 教授, 研究方向为超声检测。

通讯作者: 张海燕, E-mail: hyzh@shu.edu.cn

波函数展开法, 给出了部分穿透孔的数值解, 发现为了实现收敛, 需要大量的兰姆波模式。例如, 在第二个弯曲模式的 1/3 倍截止频率这样低的频率, 计算中需要 9 个兰姆波模式^[11]。对于更高的频率, 在展开式中将会有更多项, 这样将导致很慢的收敛率。因此, 要求寻找计算上更有效的求解方法。

作为对兰姆波精确解的替代, 各种近似板理论, 如 Kane-Mindlin 膨胀形变(extensional deformation)理论^[12]以及 Mindlin 板弯曲理论^[13], 无论是对称和反对称模式, 都已可以很精确地描述兰姆波的频散特性, 达到了第二个弯曲模式的截止频率^[14]。在低频限制下, 对于膨胀波(S0 波), Mindlin 板理论退化到 Poisson 板理论, 对于弯曲波(A0 波), Mindlin 板理论退化到 Kirchhoff 板理论。Mckeen 和 Hinders^[15]采用 Mindlin 板理论, 考察了 S0 波与各种尺寸孔的散射特征。对点源激发的 S0 波, 证实了当孔的尺寸大于波束尺寸时, 散射的影响很重要, 解释了铝板中大缺陷孔平行投影层析成像中存在星状条纹图案的原因, 文中的理论和散射求解方法对发展兰姆波衍射层析成像具有重要作用。

本文基于 Poisson 板理论, 研究了入射的 S0 平面波与圆形通孔缺陷之间的相互作用。由于所考虑的问题是 3D 问题, 散射场中也包含 SH 波。又因为入射场关于板中面是对称的, 散射体也是对称的, 在低频时, 散射场中仅包含对称的 S0 和 SH0 模式, 文中对这两种模式的散射特性进行了研究, 并与 Diligent 的 3D 精确理论^[5]进行比较。给出了这两个模式位移散射场的远场方向图, 研究了激发频率和缺陷尺寸对散射结果的影响, 希望能为兰姆波无损检测提供一些理论指导。

1 问题描述

考虑入射的 S0 平面波遇到圆形通孔缺陷的散射。几何模型如图 1 所示, 板的厚度为 2h, 通孔的半径为 a, 坐标系原点位于通孔的中心。考虑时谐状态, 省略时间因子 exp(-iωt), 其中 ω 表示角频率, t 表示时间。

2 Poisson 板理论

2.1 基本方程

Poisson 板理论是描述膨胀运动的低阶近似板理论。其位移场是由两个标量势场 φ、ψ 控制, 在固定频率下, 两者满足亥姆霍兹(Helmholtz)方程:

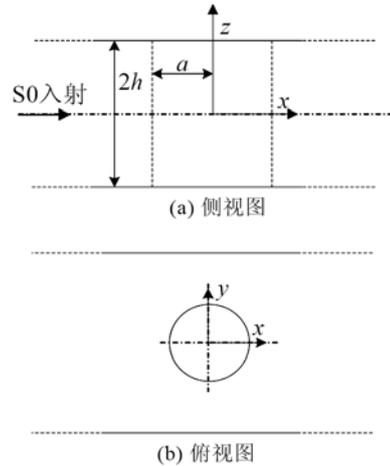


图 1 含通孔板几何模型
Fig.1 The geometry of plate with a through hole

$$\nabla^2 \phi + k_i^2 \phi = 0, \quad \nabla^2 \psi + k_i^2 \psi = 0 \tag{1}$$

其中: $k_i^2 = \frac{\omega^2}{c_i^2}$, $c_i^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}$, $k_t^2 = \frac{\omega^2}{c_t^2}$, $c_t^2 = \frac{E}{2\rho(1+\nu)}$, ρ 为密度, E 和 ν 为杨氏模量和泊松比。

图 2 给出了 Poisson 板理论与 3D 精确理论频散曲线的比较。Poisson 板理论的 c_i 在低频时与 S0 模式重合, Poisson 板理论的 c_t 在整个频率范围内与 SH0 模式重合。在低于 S1 模式的截止频率(频厚积约为 2.8 MHz·mm), S0 和 SH0 是 3D 精确理论中的传播模式, 它们对波场的贡献最大, 其它非传播模式(凋零波, 波数为复数)相对于这两个模式对波场的贡献较小。因此, 在与这两个模式重合的频率范围内, Poisson 板理论可以作为 3D 精确理论的一种近似替代。

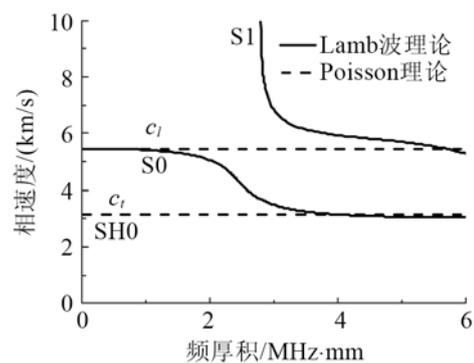


图 2 Poisson 板理论与 3D 精确理论频散曲线的比较
Fig.2 Dispersion curves of the Poisson theory (dash lines) compared to the exact 3D theory (solid lines)

柱状坐标下的应力和应变可表示为^[6]:

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{rr} + \nu \epsilon_{\theta\theta}), \quad \sigma_{r\theta} = \frac{E}{2(1+\nu)} (2\epsilon_{r\theta}) \tag{2}$$

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \quad 2\epsilon_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \tag{3}$$

式(3)中的位移用势函数表示为

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (4)$$

结合式(2)~(4)，可得：

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) \right] + \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right] \quad (5a)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right] + \frac{E}{2(1+\nu)} \left[-\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \right] \quad (5b)$$

2.2 波场展开

S0 平面波入射时，入射场用势函数表示为：

$$\phi^{inc} = e^{ik_x x} = e^{ik_l r \cos \theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(k_l r) e^{im\theta}, \quad \psi^{inc} = 0 \quad (6)$$

将式(6)代入式(5)，可得

$$\sigma_{rr}^{inc} = \frac{Ei^m}{(1-\nu^2)} \left[k_l^2 J_m''(k_l r) + \frac{\nu k_l}{r} J_m'(k_l r) - \frac{\nu m^2}{r^2} J_m(k_l r) \right] \quad (7a)$$

$$\sigma_{r\theta}^{inc} = \frac{Ei^{m+1}m}{1+\nu} \left[\frac{k_l}{r} J_m'(k_l r) - \frac{1}{r^2} J_m(k_l r) \right] \quad (7b)$$

在散射场区域，方程(1)的解为

$$\phi^{scat}(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m H_m(k_l r) e^{im\theta} \quad (8a)$$

$$\psi^{scat}(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m H_m(k_l r) e^{im\theta} \quad (8b)$$

a_m 与 b_m 为散射场的展开系数，可利用在缺陷处的边界条件求出。

将式(8)代入式(5)，可得

$$\sigma_{rr}^{scat} = \frac{Ea_m}{(1-\nu^2)} \left[H_m''(k_l r) k_l^2 + \frac{\nu k_l}{r} H_m'(k_l r) - \frac{\nu m^2}{r^2} H_m(k_l r) \right] + \frac{Eimb_m}{(1+\nu)} \left[\frac{k_l}{r} H_m'(k_l r) - \frac{1}{r^2} H_m(k_l r) \right] \quad (9a)$$

$$\sigma_{r\theta}^{scat} = \frac{Eima_m}{1+\nu} \left[\frac{k_l}{r} H_m'(k_l r) - \frac{1}{r^2} H_m(k_l r) \right] - \frac{Eb_m}{2(1+\nu)} \left[k_l^2 H_m''(k_l r) - \frac{k_l}{r} H_m'(k_l r) + \frac{m^2}{r^2} H_m(k_l r) \right] \quad (9b)$$

2.3 边界条件

同 3D 精确理论类似，在孔边缘 $r=a$ 处的边界条件为：

$$\sigma_{rr}^{inc} + \sigma_{rr}^{scat} = 0 \quad (10a)$$

$$\sigma_{r\theta}^{inc} + \sigma_{r\theta}^{scat} = 0 \quad (10b)$$

方程(8)中的展开系数可通过式(10)确定。对每一个 m 值，含有两个未知数的系统方程用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_m \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

式(11)中的 $\alpha_{i,j}$ ($i, j=1, 2$)、 β_i ($i=1, 2$) 见后面附录。

3 数值计算

数值示例中所用的材料为钢板，其材料参数为：杨氏模量 $E=210$ GPa，泊松比 $\nu=0.3$ ，或 Lamé 常数 $\lambda=121.2$ GPa， $\mu=80.8$ GPa，密度 $\rho=8100$ kg/m³。

数值分析中的无量纲参数为：入射场的波数 k 与孔半径的乘积 ka (k 为入射的 S0 模式的波数，这里 $k=k_l$)，归一化频率 $\Omega=\omega h/c_l$ ，孔半径 a/h 。

文献[5]给出了 Poisson 板理论和 Diligent 的 3D 精确理论在不同频率、不同孔径时两种基本对称模式的位移远场散射方向图，并对其结果进行了比较。散射波的位移远场幅值定义为

$$U_i^\infty(\theta) = |u_i(r, \theta)| \sqrt{r/h}, \quad r \rightarrow \infty, \quad i=r, \theta \quad (12)$$

其中 U_r^∞ 和 U_θ^∞ 分别相应于 S0 和 SH0 模式。表达式中的 $\sqrt{r/h}$ 项是为了校正波场随距离散射体传播距离增加而引起的几何衰减。

3.1 频率变化对散射场的影响

图 3 和图 4 给出了 S0 和 SH0 的位移散射远场

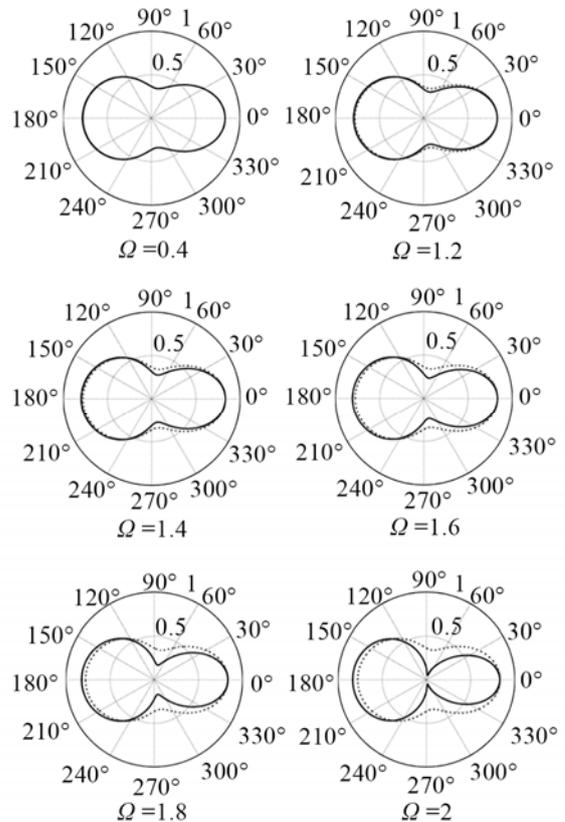
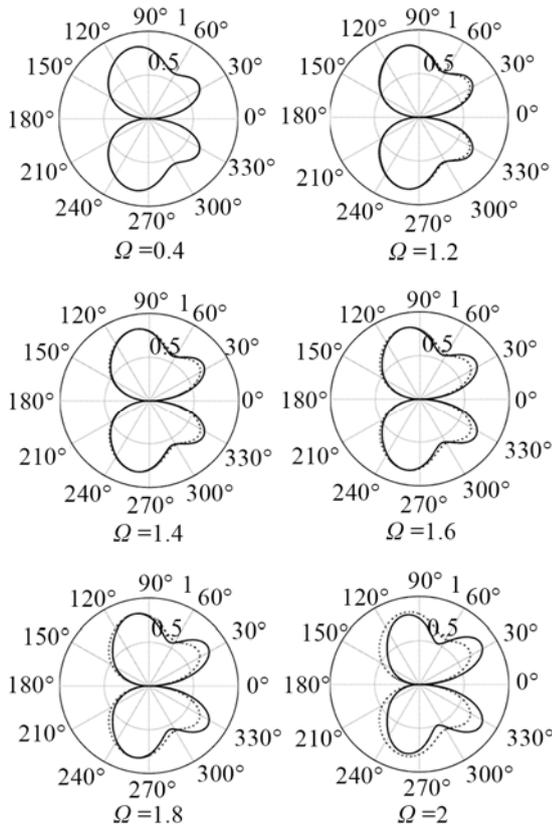


图 3 不同频率时 S0 模式的位移散射远场方向图
Fig.3 Far field patterns of displacement scattering for S0 mode at different frequencies



Poisson 板理论(---); 3D 精确理论(—)

图 4 不同频率时 SH0 模式的位移散射远场方向图

Fig.4 Far field patterns of displacement scattering for SH0 mode at different frequencies

方向图, 其中, $ka=1(a \approx \lambda/6, \lambda$ 为入射波的波长)。可以看到, 随频率(更确切地说, 频厚积)增加, Poisson 板理论偏离 3D 精确理论的变化情况。低频时, $\Omega \leq 0.4$, 两个理论模型具有完好的一致性。随着频率增加, 两者间逐渐分离, 当 $\Omega=1.2$ 时, Poisson 板理论与 3D 精确理论的偏差较小。但随着频率继续增大, Poisson 板理论在形状上与 3D 精确理论的差异逐渐增大。对不同的孔径, 如 $ka=2(a \approx \lambda/3)$, 随着频率变化, 这两个理论具有类似的变化趋势, 只不过它们出现偏离时的频率可能不同, 这里不再给出。

3.2 缺陷尺寸对散射场的影响

既然 Poisson 板理论在低频情况下可以作为 3D 精确理论的替代, 我们可以在低频时采用 Poisson 板理论研究散射体(缺陷)变化对散射场的影响, 以便对缺陷进行评价, 这将大大简化计算。图 5 和图 6 给出了 $\Omega=0.4$, 不同 ka 值时的 S0 和 SH0 模式的位移散射远场方向图。可以看到, 散射的 S0 波主要集中在前向(0°)和后向(180°)(图 5), 而散射的 SH0 波主要集中在横向方向($90^\circ \sim 150^\circ, 210^\circ \sim 270^\circ$)(图 6)。随着 ka 增大, S0 波越来越集中在前向, 且具

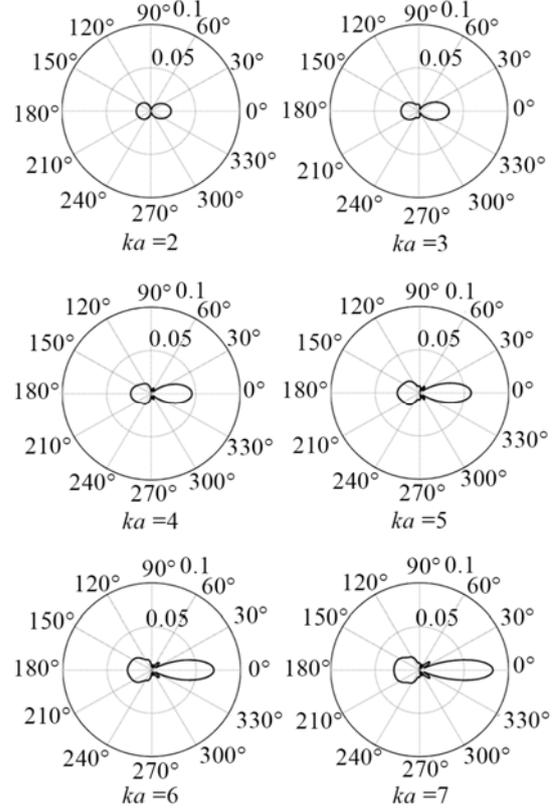


图 5 $\Omega=0.4$, 不同 ka 值时 S0 模式的位移散射远场方向图
Fig.5 Far field patterns of displacement scattering for S0 mode at $\Omega=0.4$ for different ka values

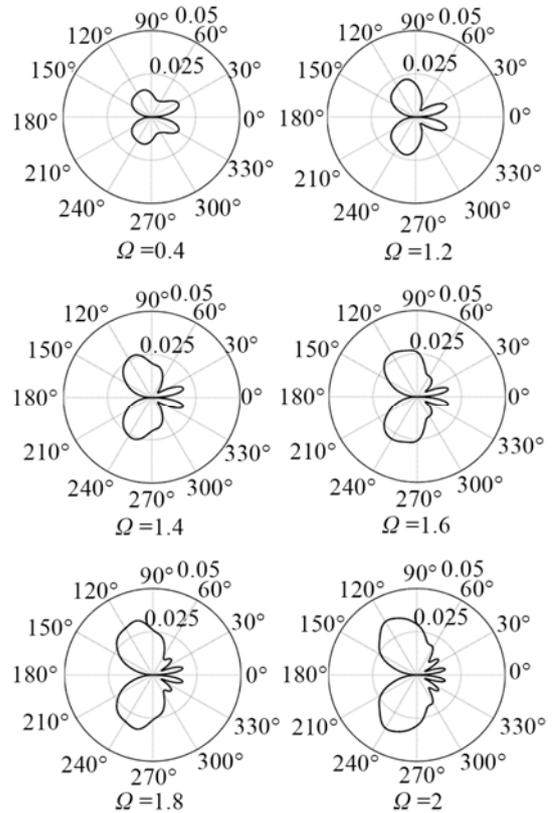


图 6 $\Omega=0.4$, 不同 ka 值时 SH0 模式的位移散射远场方向图
Fig.6 Far field patterns of displacement scattering for SH0 mode at $\Omega=0.4$ for different ka values

有更强的波束指向性和更大的幅值(图 5)。同样，随 ka 增大，SH0 波在横向方向也具有更大的幅值(图 6)。更清晰的比较显示在图 7 中，可以看到， 0°

散射角时的 S0 散射波幅值可以反映 ka 的变化，而 110° (或 250° ，由于对称性，图中未给出)附近散射角时 SH0 散射波的幅值也可以反映 ka 的变化，且这种变化近似线性，如图 7(b)、7(d)所示，以此可以对缺陷的大小进行评判。

4 结 语

尽管 3D 精确理论在高频情况下求解散射场比较精确，但是其计算过程繁琐，并且随着频率的增高，模态数变多，计算复杂性变大。在低频情况下，采用 3D 精确理论并没有显示出优越性。基于此，本文用简单的 Poisson 板理论计算 S0 兰姆波对通孔的散射，并与 3D 精确理论进行了对比，给出了 Poisson 板理论的适用范围。在此基础上，对 S0 和 SH0 的远场散射特性进行了研究，得出的结论是：

(1) Poisson 板理论是最低阶的描述膨胀波运动的近似板理论，仅在低频下(如对钢板， $\Omega \leq 0.4$ ，相当于频厚积 $\leq 0.4\text{MHz} \cdot \text{mm}$)才可以给出较精确的结果。

(2) 在低频限制下，Poisson 板理论相比 3D 精确理论是一种较好的选择，可以极大地简化计算。这是因为 3D 精确理论波场展开式中包含较多的传播模式和非传播模式，而 Poisson 板理论仅含有两个模式。实际上，为了避免兰姆波的频散和多模式混叠，兰姆波检测多在低频情况下进行。

(3) S0 和 SH0 具有不同的散射场分布。S0 散射波能量主要集中在前向和后向，其前向散射波幅值随孔径增大线性增加。SH0 散射波能量主要集中在横向方向，在某些散射角度方向散射波幅值也随孔径呈近似线性变化。这两种模式都可以为缺陷无损评价提供理论指导。

(4) 本文所用的理论和方法为用解析法求解兰姆波在固体中的散射提供了基础。从入射场来说，可以推广到任何可能的波型，如更高阶的对称模式、弯曲波模式(反对称模式)，也可以从平面波入射推广到点源、有限宽度的源入射。从缺陷类型来说，可以从通孔推广到盲孔，也可以从圆孔推广到椭圆孔，甚至不规则孔。从材料来说，也可从各向同性材料推广到各向异性复合材料。

参 考 文 献

[1] 郑阳, 何存富, 周进节, 等. 超声兰姆波斜入射裂纹时的散射特性[J]. 机械工程学报, 2013, 49(4): 6-12.
ZHENG Yang, HE Cunfu, ZHOU Jinjie, et al. Scattering characteristic of Lamb wave at crack with oblique incident[J]. J. Mech.

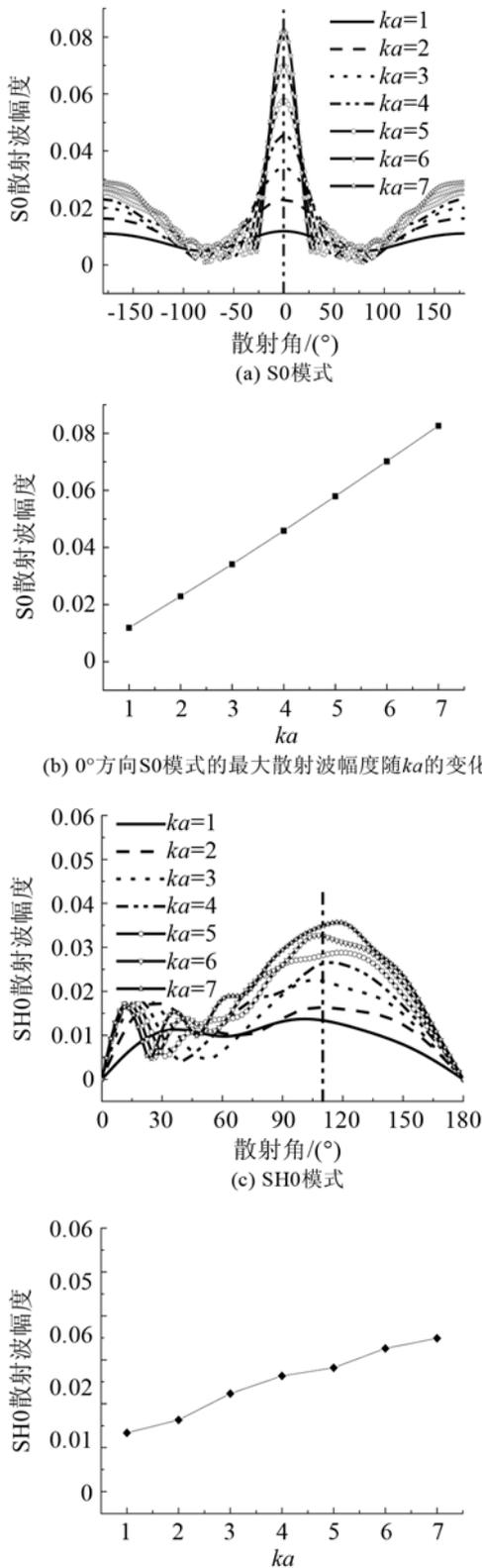


图 7 $\Omega=0.4$ ，不同 ka 值时 S0 和 SH0 模式的散射图
Fig.7 Scattering patterns of S0 and SH0 modes for different ka values at $\Omega=0.4$

- Engin., 2013, **49**(4): 6-12.
- [2] 王坤, 黄松龄, 赵伟. 平板兰姆波与缺陷作用边界元仿真实现研究[J]. 中国机械工程, 2009, **20**(8): 887-891.
WANG Kun, HUANG Songling, ZHAO Wei. Study on implementation of boundary element method simulation for Lamb wave interaction with defects in elastic plate[J]. China Mechanical Engineering, 2009, **20**(8): 887-891.
- [3] WANG X, YING C F. Scattering of Lamb waves by a circular cylinder[J]. J. Acoust. Soc. Am., 2001, **110**(4): 1752-1763.
- [4] Castaings M, Clezio E L, Hosten B. Modal decomposition method for modeling the interaction of Lamb waves with cracks[J]. J. Acoust. Soc. Am., 2002, **112**(6): 2567-2582.
- [5] Dilligent O, Grahn T A, Boström A, et al. The low-frequency reflection and scattering of the S_0 Lamb mode from a circular through-thickness hole in a plate: Finite Element, analytical and experimental studies[J]. J. Acoust. Soc. Am., 2002, **112**(6): 2589-2601.
- [6] Grahn T. Lamb wave scattering from a circular partly through-thickness hole in a plate[J]. Wave Motion, 2003, **37**: 63-80.
- [7] 邓庆田, 杨智春. 导波在多损伤结构中的散射[J]. 振动与冲击, 2010, **29**(4): 40-43.
DENG Qingtian, YANG Zhichun. Scattering of guided waves in a plate with multiple damages[J]. Journal of Vibration and Shock, 2010, **29**(4): 40-43.
- [8] Moreau L, Caleap M, Velichko A, Wilcox P D. Scattering of guided waves by flat-bottomed cavities with irregular shapes[J]. Wave Motion, 2012, **49**: 375-387.
- [9] Doyle J F. Wave propagation in structures[M]. Second Edition, New York: Springer, 1997.
- [10] Wang C H, Rose L R F. Wave reflection and transmission in beams containing delamination and inhomogeneity[J]. J. Sound. Vib., 2003, **264**: 851-872.
- [11] Wang C H, Chang F K. Scattering of plate waves by a cylindrical inhomogeneity[J]. J. Sound. Vib., 2005, **282**: 429-451.
- [12] Kane T R, Mindlin R D. High-frequency extensional vibrations of plates[J]. J. Appl. Mech., 1956, **23**: 277-283.
- [13] Mindlin R D. Influence of rotary inertial and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates[J]. J. Appl. Mech., 1951, **18**: 31-38.
- [14] Wang C H, Rose L R F. Wave reflection and transmission in beams containing delamination and inhomogeneity[J]. J. Sound. Vib., 2003, **264**: 851-872.
- [15] Mckeon J C P, Hinders M K. Lamb wave scattering from a through hole[J]. J. Sound. Vib., 1999, **224**(5): 843-862.

附 录

$$\alpha_{11} = (k_1 a)^2 H_m''(k_1 a) + \nu(k_1 a) H_m'(k_1 a) - \nu m^2 H_m(k_1 a)$$

$$\alpha_{12} = i m (1 - \nu) \left[(k_1 a) H_m'(k_1 a) - H_m(k_1 a) \right]$$

$$\alpha_{21} = i m \left[(k_1 a) H_m'(k_1 a) - H_m(k_1 a) \right]$$

$$\alpha_{22} = -\frac{1}{2} \left[(k_1 a)^2 H_m''(k_1 a) - (k_1 a) H_m'(k_1 a) + m^2 H_m(k_1 a) \right]$$

$$\beta_1 = -i^m \left[(k_1 a)^2 J_m''(k_1 a) + \nu(k_1 a) J_m'(k_1 a) - \nu m^2 J_m(k_1 a) \right]$$

$$\beta_2 = -i^{m+1} m \left[(k_1 a) J_m'(k_1 a) - J_m(k_1 a) \right]$$