

# 对两相材料薄板声功率及其灵敏度研究

薛晓理, 吴锦武, 赵龙胜

(南昌航空大学飞行器工程学院, 江西南昌 330063)

**摘要:** 采用有限元与声辐射模态相结合方法研究两相材料薄板声辐射声功率, 并分析结构声功率关于设计参数的灵敏度。应用有限元方法来处理结构的振动环节, 将位移向量用振型的线性组合表示, 用振型叠加法求解模态坐标得到位移向量从而求出结构的速度分布; 在声辐射环节, 采用声辐射模态展开从而求得声功率。将薄板声功率对设计参数求偏导, 得到声功率灵敏度。以四边简支两相材料薄板为例, 着重对声功率关于板密度和厚度的灵敏度进行了研究。

**关键词:** 声辐射模态; 声功率; 灵敏度; 两相材料薄板

中图分类号: TB532

文献标识码: A

文章编号: 1000-3630(2014)-05-0393-05

DOI 编码: 10.3969/j.issn1000-3630.2014.05.002

## Analysis of sound power and sensitivity of bi-material thin plate

XUE Xiao-li, WU Jin-wu, ZHAO Long-sheng

(School of Aircraft Engineering, Nanchang Aviation University, Nanchang 330063, Jiangxi, China)

**Abstract:** In this paper, the sound power and sound radiation sensitivity of bi-material thin plate is studied by using FEM and sound radiation mode method. On the aspect of the structure vibration solved by FEM, the displacement vector is regarded as a linear combination of the modals, and using modal superposition method solves the modal coordinates to get the displacement vector and the velocity distribution of the structure; on the aspect of sound radiation, the sound power is obtained by the expansion of the acoustic radiation modes. The sound radiation sensitivity is defined by the partial derivatives of sound radiation power with respect to design variables. Taken a simple supported bi-material thin plate as a simulation example, the sound power sensitivities to the distribution density and thickness of the plate are investigated.

**Key words:** acoustic radiation mode; sound power; sensitivity; bi-material thin plate

## 0 引言

环境中存在各种各样的振动现象, 振动辐射噪声污染环境, 因而受到广泛关注。机器结构声辐射噪声的大小成为评价其动态性能的重要指标。基于声辐射模态研究结构声功率及其灵敏度, 对降低噪声有重要的指导意义。声功率灵敏度是指声功率关于设计参数的变化率, 能够量化各设计参数对声功率的影响程度, 以声功率灵敏度为指标, 通过定量修改设计参数, 降低结构辐射噪声, 是结构优化设计的重要途径。

90 年代初, Borgiotti、Cunefare、Elliott<sup>[1-3]</sup>等学者提出声辐射模态的概念, 其实质是将结构表面的

振动分解成一组声辐射独立的速度分布, 这样声功率可表示成每阶声辐射模态速度幅值的平方与相应特征值乘积的和。近年来, 边界元法和有限元法联合求解声辐射问题得到广泛应用<sup>[4-6]</sup>。Salagame<sup>[7]</sup>等学者通过瑞利积分推出了声功率灵敏度表达式, 姜哲等<sup>[8]</sup>学者分析了加筋板的声功率灵敏度。

本文进一步拓展求解声功率及其灵敏度的研究范围, 基于声辐射模态再结合有限元求解两相材料薄板的声功率及其关于设计参数的灵敏度。建立有限元模型, 处理振动环节, 用振型叠加法求解模态坐标从而求出结构的速度分布, 用声辐射模态方法处理声辐射环节。

## 1 有限元模型

利用有限元法建立阻尼振动系统在外力激励下的振动微分方程:

$$\mathbf{M} \ddot{\boldsymbol{\delta}} + \mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\delta}} + \mathbf{K} \boldsymbol{\delta} = \mathbf{F}_0 e^{i\omega t} \quad (1)$$

其中  $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{K}$  分别为结构质量矩阵、阻尼矩阵、

收稿日期: 2014-06-05; 修回日期: 2014-10-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51265038)、航空科学基金资助项目(2011ZA56002)

作者简介: 薛晓理(1989-), 男, 江苏淮安人, 硕士, 研究方向为结构振动与噪声控制。

通讯作者: 薛晓理, E-mail: xuexiaoli88888@126.com

刚度矩阵,  $F_0$  为激励力幅值向量,  $\omega$  为激励频率,  $\delta$  为振动法向位移向量。结构的阻尼一般难以准确确定, 工程中常采用 Raileigh 阻尼, 将阻尼矩阵表示成质量矩阵和刚度矩阵的线性组合<sup>[9]</sup>:

$$C = \alpha M + \beta K \quad (2)$$

其中  $\alpha$ 、 $\beta$  为常数, 与结构的固有频率和阻尼比有关。设  $\omega_i$ 、 $\omega_j$  分别为第  $i$  个和第  $j$  个固有频率,  $\xi_i$ 、 $\xi_j$  分别为第  $i$  个和第  $j$  个振型的阻尼比(即实际阻尼和改振型的临界阻尼的比值), 则  $\alpha$ 、 $\beta$  表示为:

$$\alpha = \frac{2(\xi_i \omega_j - \xi_j \omega_i)}{(\omega_j + \omega_i)(\omega_j - \omega_i)} \omega_i \omega_j, \quad \beta = \frac{2(\xi_i \omega_j - \xi_j \omega_i)}{(\omega_j + \omega_i)(\omega_j - \omega_i)} \quad (3)$$

当  $\xi_i = \xi_j = \xi$  时, 有

$$\alpha = \frac{2\omega_i \omega_j}{\omega_i + \omega_j} \xi, \quad \beta = \frac{2}{\omega_i + \omega_j} \xi \quad (4)$$

设在简谐力激励下结构法向位移响应复数形式为

$$\delta = \delta_0 e^{i\omega t} \quad (5)$$

将式(5)代入式(1), 约去时间项得到:

$$(-\omega^2 M + i\omega C + K) \delta_0 = F_0 \quad (6)$$

可得到:

$$\delta_0 = (-\omega^2 M + i\omega C + K)^{-1} F_0 \quad (7)$$

若用式(7)直接求解, 则需要矩阵求逆运算, 大规模的矩阵逆运算耗时且由于取舍误差导致运算结果误差较大。利用振型叠加法求解模态坐标, 从而求得结构的速度分布。

在求出无阻尼振动的固有频率和振型的基础上, 将位移向量  $\delta_0$  看成是振型  $[\phi]$  的线性组合, 引入变换式:

$$\delta_0 = \sum_{i=1}^n \phi_i \eta_i = [\phi][\eta] \quad (8)$$

$\eta_i$  称为模态坐标, 将式(8)代入式(6), 方程左右两端同时左乘  $[\phi]^T$ , 得到:

$$([\phi]^T K [\phi] + i\omega [\phi]^T C [\phi] - \omega^2 [\phi]^T M [\phi]) [\eta] = [\phi]^T F_0 \quad (9)$$

将对角化后的刚度矩阵、质量矩阵、阻尼矩阵代入式(9)可实现对振动微分方程的解耦:

$$(\omega_i^2 + i\omega(\alpha + \beta\omega_i^2) - \omega^2) \eta_i = F_{0i}, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (10)$$

解式(10)得到模态坐标:

$$\eta_i = \frac{F_{0i}}{\omega_i^2 - \omega^2 + i\omega(\alpha + \beta\omega_i^2)} \quad (11)$$

对于线性系统的动力响应分析, 振型叠加法是很有效的。它的优点在于简便。由于高振型对反应的贡献不显著, 通常考虑前几阶振型的反应贡献就可得到所需的精度。

振动法向速度是法向位移关于时间的导数, 舍

去时间因子项, 得到

$$U = i\omega \delta_0 \quad (12)$$

振速对设计参数  $x$  求偏导为:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = i\omega \frac{\partial \delta_0}{\partial x} \quad (13)$$

$\frac{\partial U}{\partial x}$  称为结构振速对设计参数  $x$  的灵敏度。对式(6)两边对设计参数  $x$  求偏导, 得到:

$$\left( \frac{\partial K}{\partial x} + i\omega \frac{\partial C}{\partial x} - \omega^2 \frac{\partial M}{\partial x} \right) \delta_0 + (K + i\omega C - \omega^2 M) \frac{\partial \delta_0}{\partial x} = 0 \quad (14)$$

由式(13)、(14)得到:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -i\omega (K + i\omega C - \omega^2 M)^{-1} \left( \frac{\partial K}{\partial x} + i\omega \frac{\partial C}{\partial x} - \omega^2 \frac{\partial M}{\partial x} \right) \delta_0 \quad (15)$$

其中  $\delta_0$  可通过式(8)求得。刚度矩阵  $K$  和质量矩阵  $M$  可以直接对设计参数求偏导, 或者可以通过差分计算得到其对设计参数的偏导。然后代入式(15)可得到  $\frac{\partial U}{\partial x}$ , 即振速对设计参数的灵敏度。

## 2 声辐射模态模型

任意形状的振动结构表面  $S$  以圆频率  $\omega$  振动, 向无界空间  $V$  辐射声。在空间  $V$  中充满均匀介质, 介质的密度为  $\rho$ , 声速为  $c$ 。设振动表面  $S$  上的法相振速为  $U$ , 辐射声压为  $P(\omega)$ 。对于单频振动, 结构的辐射声功率<sup>[10]</sup>可表示为:

$$W = \frac{1}{2} \int_S \text{Re}(U^H \cdot P(\omega)) dS \quad (16)$$

式中:  $\text{Re}$  表示取复数实部, 上标  $H$  表示矩阵共轭转置。

通过瑞利积分, 平板上任一点  $X$  处声压  $P(X, \omega)$  与结构表面法相振速可离散为

$$P(X, \omega) = Z \cdot U \quad (17)$$

式中,  $Z$  为阻抗矩阵。

由式(17), 可将式(16)写成如下形式<sup>[10]</sup>:

$$W = \frac{1}{2} \text{Re}(U^H \cdot P) = \frac{\rho c S}{2} (U^H \cdot R \cdot U) \quad (18)$$

$R$  为实对称正定矩阵<sup>[10]</sup>, 将其进行特征值分解可以得到一个正交矩阵  $Q$  和对角矩阵  $\Lambda$ :

$$R = Q \cdot \Lambda \cdot Q^T = Q \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot Q^T \quad (19)$$

式(19)中,  $T$  表示矩阵转置;  $n$  为结构离散节点数,  $\Lambda$  为由特征值  $\lambda_i$  构成的对角矩阵。将式(19)代入式(18)可以得到

$$W = \frac{\rho c S}{2} U^H Q \cdot A \cdot Q^T U = \frac{\rho c S}{2} (Q^H U)^H \cdot A \cdot (Q^H U) = \frac{\rho c S}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i |y_i|^2 \quad (20)$$

式中： $y = Q^H \cdot U$ ，称为声辐射模态的伴随系数矩阵， $y_i$  为第  $i$  阶声辐射模态伴随系数。根据式(20)，可以得到声功率关于设计参数  $x$  的偏导数，即声功率灵敏度为：

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\rho c S}{2} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} |y_i|^2 + \lambda_i y_i \left( \frac{\partial y_i}{\partial x} \right)^H + \lambda_i \frac{\partial y_i}{\partial x} y_i^H \right] \quad (21)$$

特别对于与分析频率无关的参数，由于辐射表面形状、尺寸不受影响，此时声辐射模态不发生变化。声功率灵敏度表达变为

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \left[ \lambda_i y_i \left( \frac{\partial y_i}{\partial x} \right)^H + \lambda_i \frac{\partial y_i}{\partial x} y_i^H \right] \quad (22)$$

### 3 算例及分析

#### 3.1 声功率分析

设采用工程中常用的矩形薄板结构，薄板由两相材料构成，一种为刚性材料，一种为柔性材料。

设薄板的长、宽以及厚分别为  $a=0.2\text{m}$ ， $b=0.2\text{m}$ ， $t=0.001\text{m}$ 。给定结构刚性材料(钢)和柔性材料(PVF)弹性模量分别为  $E_1=2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ， $E_2=3.5 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ；密度分别为  $\rho_1=7800 \text{ kg/m}^3$ ， $\rho_2=1400 \text{ kg/m}^3$ ；泊松比  $\mu=0.3$ ，空气密度  $\rho=1.225 \text{ kg/m}^3$ ，声速  $c=343 \text{ m/s}$ 。在板中心位置施加单频激励力，幅值  $F_0=1 \text{ N}$ ，激励频率为 1:800 Hz。

根据 Bendøse<sup>[11]</sup>的研究结果，得到复合薄板的弹性模量和密度按照带惩罚的变密度 SIMP 插值方式构成：

$$\begin{aligned} E &= \bar{x}^p E_1 + (1 - \bar{x}^p) E_2 \\ \rho &= \bar{x}^p \rho_1 + (1 - \bar{x}^p) \rho_2 \end{aligned} \quad (23)$$

式中： $\bar{x}$  为材料分布密度，取  $\bar{x}=0.5$ ，惩罚因子  $p=4$ 。

对两相材料薄板进行模态分析，得到了结构的前 10 阶模态频率见表 1。

表 1 简支薄板前十阶固有频率

Table.1 The first ten natural frequencies of a simple supported plate					
模态阶数	1	2	3	4	5
频率/Hz	72.6	181.5	181.5	289.5	362.9
模态阶数	6	7	8	9	10
频率/Hz	362.9	469.5	469.5	617	617

根据式(18)得到了薄板随频率变化的声功率级，所得结果如图 1 所示。

分析表 1 和图 1 可知，薄板在第一阶固有频率(72.6 Hz)处声功率达到最大值，在结构设计时应当避免激励频率与第一阶固有频率接近。本例中薄板是正方形，其第  $(m, n)$  阶和第  $(n, m)$  阶模态频率相等，在第 5 阶和第 6 阶的时候，实际激起的模态振型有两阶，因此在这个频率(362.9 Hz)的时候，结构辐射声功率也很大。

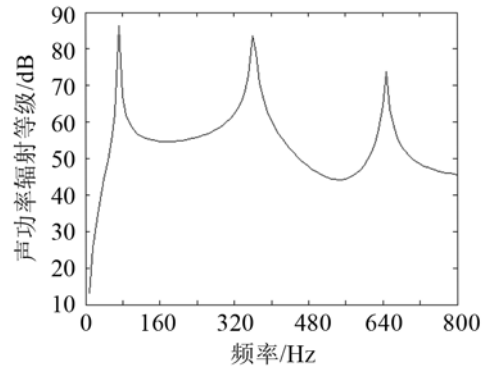


图 1 薄板辐射声功率级  
Fig.1 Sound power level radiated by a thin plate

#### 3.2 声功率关于板厚的灵敏度分析

为了从理论上研究分析两相材料薄板的厚度、分布密度和振动频率对薄板声辐射的影响，在上述模型的基础上，分别改变算例中板厚和分布密度，对其进行研究。

按照算例模型，板的厚度  $t$  可变，其变化规律为： $t=(0.008+0.008n) \text{ mm}$ ， $(n=0,1,2,\dots,99)$ 。分析了激励频率为 100、200、300、400 Hz 时声功率及其关于板厚变化的灵敏度，得到图 2 和图 3。

分析图 2、图 3 可知，当声功率达到峰值时，相应的声功率灵敏度也达到峰值，这些峰值是由于激励频率与薄板的固有频率接近使薄板产生了共振。

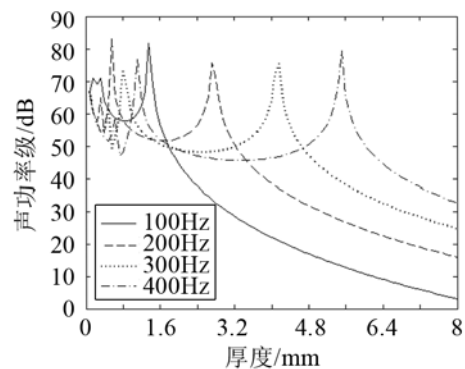


图 2 不同厚度下薄板的声辐射功率  
Fig.2 Sound powers radiated by the plate of different thicknesses

薄板厚度在 1 mm 以下时，声功率及其灵敏度随着板厚的变化比较明显。随着厚度的增加，声功率及其灵敏度会出现一些“平坦区域”，在这些区

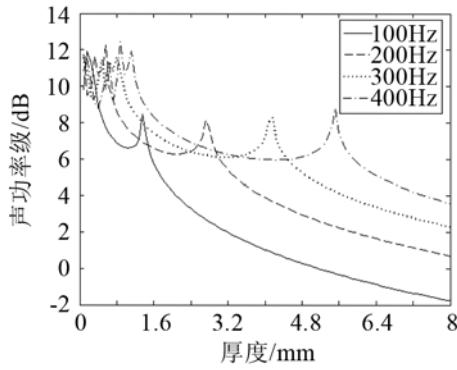


图3 薄板关于厚度的声功率灵敏度  
Fig.3 Sound power sensitivity to the thickness of the plate

域内，板厚对声功率的影响不明显。

随着激励频率的增大，声功率及其灵敏度的峰值位置所对应的薄板厚度在向后推移。激励频率为 100 Hz 时，峰值出现在 1.36 mm 处，声功率及其灵敏度分别为 81.606 dB 和 8.466；200 Hz 时，峰值出现在 2.72 mm 处，声功率及其灵敏度分别为 75.548 dB 和 8.134；300 Hz 时，峰值出现在 4.16 mm 处，声功率及其灵敏度分别为 75.326 dB 和 8.255；400 Hz 时，峰值出现在 5.52 mm 处，声功率及其灵敏度分别为 79.312 dB 和 8.783。说明在实际中不是薄板的厚度越大越好，薄板的厚度应该根据结构的激励源来确定。

### 3.3 声功率关于分布密度的灵敏度分析

按照算例模型，板的材料密度分布  $\bar{x}$  可变，其变化规律为： $\bar{x} = 0.01 + 0.01n$ , ( $n=1,2,\dots,99$ )。分析了激励频率为 100、200、300、400 Hz 时声功率及其关于分布密度变化的灵敏度，得到图 4 和图 5。

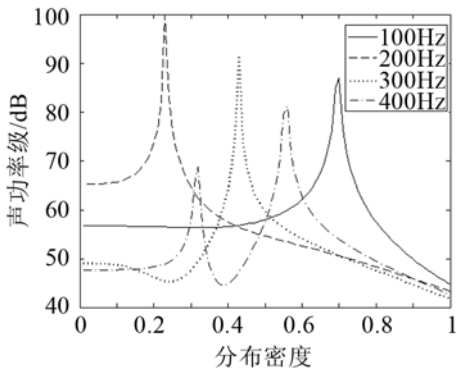


图4 不同分布密度下的薄板声功率  
Fig.4 Sound power radiated by the plate of different distribution densities

分析图 4、5 可知，当声功率达到峰值时，相应的声功率灵敏度也达到峰值，这些峰值是由于薄板在激励频率下产生了共振。在峰值之前，声功率及其灵敏度出现了“平坦区域”，在这区域内调整结构的材料分布密度，不能有效地控制结构噪声。

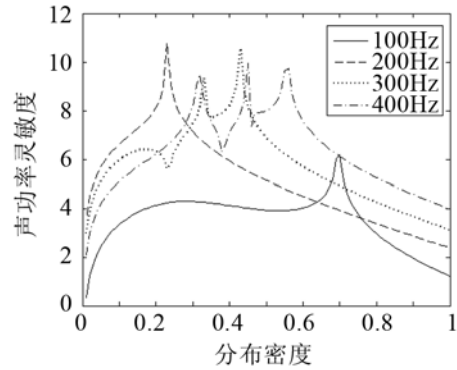


图5 薄板关于分布密度的声功率灵敏度  
Fig.5 Sound power sensitivity to the distribution density of the plate

在峰值之后，薄板声功率随密度的增大而迅速减小。

在低频激励时，声功率及其灵敏度出现峰值次数很少，随着激励频率的增加，声功率及其灵敏度出现峰值的次数也在增加，变化也越来越复杂。

### 3.4 声功率综合分析

分别取图 2 和图 4 峰值位置的板厚与分布密度，在相应的激励频率下求得相应的声功率，得到表 2。表 2 中的声功率明显小于图 2 和图 4 中峰值位置所对应的声功率，说明两相材料薄板的声功率受到薄板厚度、材料分布密度、外界激励频率的综合因素的影响。

表 2 简支薄板声功率  
Table 2 Sound power radiated by a simple supported plate

板厚/mm	分布密度	激励频率/Hz	声功率/dB
1.36	0.70	100	45.713
2.72	0.23	200	48.706
4.16	0.43	300	50.947
5.52	0.56	400	47.472

综合分析得到：当激励频率接近薄板固有频率附近，结构声辐射功率急剧增加达到峰值。在“平坦区域”内，薄板的声辐射功率并不随着板厚与密度分布的增加而减小，这主要是由于薄板的固有频率随着板厚与分布密度的变化而变化，从而引起声辐射功率的变化。同时可以看出，随着结构厚度或者分布密度的增加，结构辐射声功率的总体变化趋势是减小的，但声辐射功率并不是随结构厚度或者分布密度的增加而单调减小，在某些厚度或者分布密度下，结构辐射声功率不降反升。同时也说明，薄板结构并不是越厚越好，也不是密度越大越好，其厚度与分布密度值的选择还应取决于激励源特性。

## 4 结 论

本文利用有限元与声辐射模态对两相材料薄

板结构的声辐射声功率及其关于设计参数的灵敏度进行了研究,以四边简支正方形薄板为例,分析了激励频率、薄板厚度与分布密度的变化对其声辐射的影响。在有限元部分,用振型叠加法求解模态坐标得到位移向量,从而得到薄板表面速度分布。基于声辐射模态理论,求解了声功率及其关于设计参数的灵敏度。

数值计算结果表明:对于动力响应分析,振型叠加法是很有效的。激励频率、不同的板厚与分布密度对薄板的声辐射都有较大的影响。

将有限元与声辐射模态方法相结合,可以实现对任意边界条件薄板的声辐射特性进行研究,从而为低噪声设计提供理论依据,对实际中结构的设计有重要的指导意义。

### 参 考 文 献

- [1] Giorgio V Borgiotti. The power radiated by a vibrating body in an acoustic fluid and its determination from boundary measurements [J]. *J. Acoust. Soc. Am*, 1990, **88**(4): 1884-1893.
- [2] Cunefare K A, Koopmann G H. Acoustic design sensitivity for structural radiators [J]. *ASME, J. Vib. Acoust*, 1992, **114**(2): 178-186.
- [3] Elliott S J, Johnson M E. Radiation modes and the active control of sound power[J]. *J. Acoust. Soc. Am*, 1993, **94**(4): 2194-2204.
- [4] 张军, 兆文忠, 张维英. 结构声辐射有限元/边界元法声学-结构灵敏度研究[J]. *振动工程学报*, 2005, **18**(3): 366-370.
- [5] ZHANG Jun, ZHAO Wenzhong, ZHANG Weiyong. Research on acoustic-structure sensitivity basing on FEM and BEM[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2005, **18**(3): 366-370.
- [6] 白杨, 汪鸿振. 声学-结构设计灵敏度分析[J]. *振动与冲击*, 2003, **22**(3): 43-46.
- [7] BAI Yang, WANG Hongzhen. Acoustic-Structural design sensitivity analysis[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2003, **22**(3): 43-46.
- [8] 陈剑, 程昊, 高煜, 等. 基于有限元一边界元的声学构形灵敏度分析[J]. *振动工程学报*, 2009, **22**(2): 213-217.
- [9] CHEN Jian, CHENG Hao, GAO Yu, et al. Acoustic configuration sensitivity analysis based on FEM and BEM[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2009, **22**(2): 213-217.
- [10] Salagame R R, Koopmann G H. Analytical sensitivity of acoustic power radiated from plates[J]. *J. Vib. Acoust*, 1995, **117**(1): 43-45.
- [11] 邱亮, 姜哲, 袁国清. 基于声辐射模态的粘弹性阻尼板声功率灵敏度[J]. *噪声与振动控制*, 2009, **5**(5): 131-135.
- [12] QIU Liang, JIANG Zhe, YUAN Guoqing. Analysis of sound power sensitivity of viscoelastic damping plates based on acoustic radiation modes[J]. *Noise and Vibration Control*, 2009, **5**(5): 131-135.
- [13] 王元汉, 李丽娟, 李银平. 有限元法基础与程序设计[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 2001: 157.
- [14] WANG Yuanhan, LI Lijuan, LI Yinping. Finite element theory and programming[M]. Guangzhou: South China University of Technology Press, 2001: 157.
- [15] 姜哲. 声辐射问题中模态分析: I 理论[J]. *声学学报*, 2004, **29**(6): 507-515.
- [16] JIANG Zhe. A modal analysis for the acoustic radiation problems: I Theory[J]. *Acta Acustica*, 2004, **29**(6): 507-515.
- [17] Bendøse M P, Sigmund O. Material interpolation schemes topology optimization[J]. *Arch Appl Mech*, 1999, **69**(9-10): 635-654.