

Alpha 稳定分布序列的数值仿真方法

彭 成, 王平波, 刘旺锁

(海军工程大学, 湖北武汉 430033)

摘要: Alpha 稳定分布是对水声混响数据进行非高斯概率密度拟合的最优模型之一, 而仿真产生服从标准参数系下的 Alpha 稳定分布序列是展开相应研究的基础。论述了三种参数系下服从 Alpha 稳定分布随机变量的变换关系及各种参数系表述的优缺点, 实现了标准参数系下任意参数组合 Alpha 稳定分布序列的数值仿真; 同时还利用直接数值积分法完成了无显性概率密度表达式的 Alpha 稳定分布序列概率密度值计算, 以之作为理论值与统计值进行了分析比较, 验证了数值仿真方法的正确性。

关键词: Alpha 稳定分布; 混响; 标准参数系; 随机变量; 概率密度函数

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1000-3630(2014)-05-0473-04

DOI 编码: 10.3969/j.issn1000-3630.2014.05.017

Numerical simulation method of Alpha stable distribution sequence

PENG Cheng, WANG Ping-bo, LIU Wang-suo

(Navy Engineering University, Wuhan 430033, Hubei, China)

Abstract: Alpha stable distribution is one of the best non-Gaussian probability models for underwater acoustics reverberation data. Numerical simulation of Alpha Stable Distribution sequence, which obeys the standard parameter system, is the basis of the corresponding research. The transformation relationship among Alpha Stable Distribution random variables under the three parameter systems and the advantages and disadvantages of various parameter system formulations are summarized. Under the standard parameter system the numerical simulation of Alpha stable distribution sequence with of arbitrary parameter combination is implemented. Without explicit probability density expression, the probability density values of Alpha Stable Distribution are calculated with direct numerical integration method, which are used as theoretical values to make comparative analysis with statistical ones, and to verify the correctness of the numerical simulation method.

Keywords: Alpha stable distribution; reverberation; standard parameter system; random variable; probability density function (PDF)

0 引言

水声混响信号的统计特性表明, 它具有显著的尖峰脉冲特性和厚拖尾现象。这与机载雷达的地面散射干扰非常相似。因此主动声呐抗混响可以借鉴 Alpha 稳定(αS)分布在雷达杂波抑制^[1]中的应用方法^[2]。

Alpha 稳定分布^[3]又称为非高斯稳定分布, 最初由利维(Levy)于 1925 年提出。但直到 1993 年, Shao 和 Nikias 的论文^[4]才将对称 Alpha 稳定分布($S\alpha S$ 分布, 一类 αS 分布特例)模型应用于描述具

有尖峰冲激、厚拖尾的噪声。目前大多数信号处理的研究都假设噪声或干扰是服从高斯分布^[5,6]。然而实际干扰的统计特性并不总是符合高斯假设的, 它们常具有显著的尖峰, 如雷达地面散射干扰、主动声呐混响干扰、音频信号噪声、远程电话噪声等。对于这些干扰信号, 基于高斯假设显然是不恰当的。而 αS 分布模型, 能取得较好的处理效果。

目前信号处理中都使用标准参数系表征 αS 分布。因此本文从 αS 分布模型的定义和性质出发, 讨论了易混淆的三种参数系的关系, 进而实现了标准参数系下 αS 分布随机变量的产生。通过该方法产生不同参数组合的随机序列, 并将对应的概率密度函数(Probability Density Function, PDF)与理论对 PDF 进行对比分析, 验证 αS 分布随机变量产生方法的正确性。

收稿日期: 2014-05-21; 修回日期: 2014-08-07

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51109218)。

作者简介: 彭成(1989-), 男, 四川资阳人, 硕士研究生, 研究方向为水声信号处理。

通讯作者: 王平波, E-mail: blackberet@126.com

1 Alpha 稳定分布的定义及性质

αS 分布是广义的高斯分布, 它比高斯分布具有更广泛的适用性。通常通过特征函数来给出 αS 分布的定义。 αS 分布具有三种不同的参数系^[7]表征方法, 即标准参数系 S 、 S^1 参数系和 S^2 参数系。而标准参数系下的定义是最常用的。

定义 1^[3]: 如果随机变量 X 存在参数 $0 < \alpha \leq 2$, $\gamma \geq 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$ 和实数 μ 使其特征函数如式(1)所示 $\varphi(t) =$

$$\begin{cases} \exp\{-\sigma^\alpha |t|^\alpha [1 - j\beta(\text{sign}(t))\tan(\frac{\pi\alpha}{2}) + j\mu t]\}, & \alpha \neq 1 \\ \exp\{-\sigma |t| [1 + j\beta(\text{sign}(t))\frac{2}{\pi} \log |t| + j\mu t]\}, & \alpha = 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} 1, & t > 1 \\ 0, & t = 1 \\ -1, & t < 1 \end{cases} \quad (2)$$

则称随机变量 X 服从 S 参数系下的 αS 分布。式(1)中, 参数 α 称为特征指数, 决定分布脉冲特性的程度; β 称为对称参数, 用它来确定分布的斜度; σ 称为分散系数, 它是分散程度的度量; 参数 μ 称为位置参数。然而在标准参数系下, 当 $\alpha = 1$, $\beta \neq 0$ 时, 其特征函数在随机变量的取值上均不连续。

定义 2^[3]: S^1 参数系的产生是为了消除 S 参数系特征函数的不连续性, 其特征函数如式(3)所示 $\varphi(t) =$

$$\begin{cases} \exp\{-\sigma^\alpha [|t|^\alpha - jt\beta(|t|^{\alpha-1} - 1)\tan(\frac{\pi\alpha}{2})] + j\mu t\}, & \alpha \neq 1 \\ \exp\{-\sigma |t| [1 + j\beta(\text{sign}(t))\frac{2}{\pi} \log |t| + j\mu t]\}, & \alpha = 1 \end{cases} \quad (3)$$

其中 μ_1 与 S 参数系的 μ 具有如下式的关系

$$\mu_1 = \begin{cases} \mu + \beta\sigma^\alpha \tan \frac{\pi\alpha}{2}, & \alpha \neq 1 \\ \mu, & \alpha = 1 \end{cases} \quad (4)$$

这个特征函数在 α 、 β 的所有值均联合连续, 但有一点不足是其 μ_1 不再具有位置参数原有的意义, 而其他三个参数与 S 参数系下对应参数相同。

定义 3^[3]: S^2 参数系主要是利于理论分析和推导, 其特征函数具有如式(5)所示的形式 $\varphi(t) =$

$$\begin{cases} \exp\{-\sigma_2^\alpha |t|^\alpha \exp[-j\beta_2(\text{sign}(t))\frac{\pi}{2}k(\alpha)] + j\mu t\}, & \alpha \neq 1 \\ \exp\{-\sigma_2 |t| [\frac{\pi}{2} + j\beta_2(\text{sign}(t)) \log |t| + j\mu t]\}, & \alpha = 1 \end{cases} \quad (5)$$

其中

$$k(\alpha) = \alpha - 1 + \text{sign}(1 - \alpha) = \begin{cases} \alpha, & \alpha < 1 \\ \alpha - 2, & \alpha > 1 \end{cases} \quad (6)$$

参数 α 和 μ 与标准参数系的对应参数相同, 参数 β_2 和 σ_2 与标准参数系下的参数变换关系如下:

当 $\alpha \neq 1$ 时

$$\beta_2 = \frac{2 \arctan(\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2})}{\pi k(\alpha)}, \quad \sigma_2 = \sigma (1 + \beta^2 \tan^2 \frac{\pi\alpha}{2})^{\frac{1}{2\alpha}} \quad (7)$$

当 $\alpha = 1$ 时

$$\beta_2 = \beta, \quad \sigma_2 = \sigma$$

特征函数是研究 αS 分布的一个有用工具, 利用它可以得出稳定分布的很多性质, 下面只给出本文需要的两个基本性质:

性质 1: 若 $X \sim S(\alpha, \sigma, \beta, \mu)$, a 是一个实常数, 则

$$X + a \sim S(\alpha, \sigma, \beta, \mu + a) \quad (8)$$

性质 2: 若 $X \sim S(\alpha, \sigma, \beta, \mu)$, b 是一个非零的实常数, 则

$$bX = \begin{cases} S(\alpha, |b|\sigma, \text{sgn}(b)\beta, b\mu), & \alpha \neq 1 \\ S(\alpha, |b|\sigma, \text{sgn}(b)\beta, b\mu - \frac{2}{\pi} b(\ln |b|)\sigma\beta), & \alpha = 1 \end{cases} \quad (9)$$

2 Alpha 稳定分布的产生方法

S^1 参数系的作用是为了消除 S 参数系在 $\alpha = 1$, $\beta \neq 0$ 时的不连续性; 而 S^2 参数系的主要作用是便于理论推导和分析。因此通过 S^1 、 S^2 参数系与 S 参数系间的转换关系, 就能产生出 S 参数系下符合 αS 分布的随机变量及画出 PDF 图。

(1) 首先给出 S^2 参数系下随机变量的产生方法, 然后推导出标准参数系下 αS 分布随机变量 X 的生成方法。产生两个相互独立的随机变量 V 和 W , 其中 V 是服从 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 之间的均匀分布, W 是服从均值为 1 的指数分布。定义:

$$V_0 = -\frac{\pi}{2} \beta_2 \frac{k(\alpha)}{\alpha} \quad (10)$$

$$X = \begin{cases} \frac{\sin \alpha(V - V_0) \left(\frac{\cos(V - \alpha(V - V_0))}{W} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{(\cos(V))^{\frac{1}{\alpha}}}, & \alpha \neq 1 \\ \left(\frac{\pi}{2} + \beta_2 V \right) \tan(V) - \beta_2 \log \left(\frac{W \cos(V)}{\frac{\pi}{2} + \beta_2 V} \right), & \alpha = 1 \end{cases} \quad (11)$$

(2) 然后再根据 S 和 S^2 两个参数系间的转换关系, 推导出标准参数系下服从 $S(\alpha, \beta, 1, 0)$ 分布的随机变量 Y 的生成方法。

当 $\alpha \neq 1$ 时, 首先定义

$$M_{\alpha, \beta} = \left[1 + \beta^2 \tan^2 \frac{\pi\alpha}{2} \right]^{\frac{1}{2\alpha}} \quad (12)$$

$$N_{\alpha,\beta} = -\frac{\arctan\left(\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right)}{\alpha} \quad (13)$$

其中 $M_{\alpha,\beta}$ 代表了参数 σ_2 与 σ 间的变换关系; $N_{\alpha,\beta}$ 代表了参数 β_2 与 β 间的变换关系, 用以替代 S^2 参数系产生方法中的 V_0 。于是

$$Y = M_{\alpha,\beta} \frac{\sin(\alpha(V - N_{\alpha,\beta}))}{(\cos(V))^{1/\alpha}} \left(\frac{\cos(V - \alpha(V - N_{\alpha,\beta}))}{W} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \quad (14)$$

当 $\alpha=1$ 时, $M = \pi/2$, $\beta_2 = \beta$, 有

$$Y = M \left[\left(\frac{\pi}{2} + \beta_2 V \right) \tan(V) - \beta_2 \log \left(\frac{W \cos(V)}{\frac{\pi}{2} + \beta_2 V} \right) \right] \quad (15)$$

$$\frac{\pi}{2} \left[\left(\frac{\pi}{2} + \beta V \right) \tan(V) - \beta \log \left(\frac{W \cos(V)}{\frac{\pi}{2} + \beta V} \right) \right]$$

生成的 Y 即为标准参数系下服从 $Y \sim S(\alpha, \beta, 1, 0)$ 分布的随机变量。

(3) 再利用 αS 分布的两个基本性质, 可得

$$Z = \begin{cases} \sigma X + \mu, & \alpha \neq 1 \\ \sigma X + \frac{2}{\pi} \beta \sigma \log(\sigma) + \mu, & \alpha = 1 \end{cases} \quad (16)$$

这里, 随机变量 Z 即满足 $Z \sim S(\alpha, \beta, \sigma, \mu)$ 。

如此即产生了标准参数系下满足四个参数规定范围内的、服从任意参数值组合的 αS 分布随机变量。

3 Alpha 稳定分布序列的生成

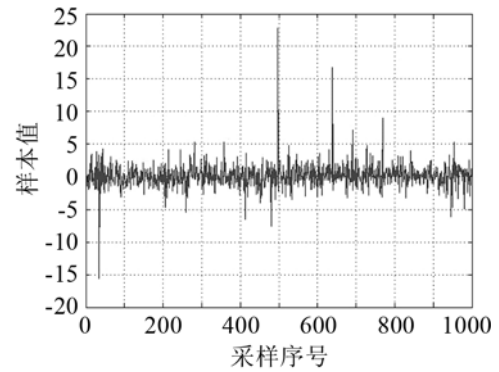
由于 αS 分布的特征函数与概率密度函数具有如下的对应关系:

$$f(x; \alpha, \beta, \sigma, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-jxt} dt \quad (17)$$

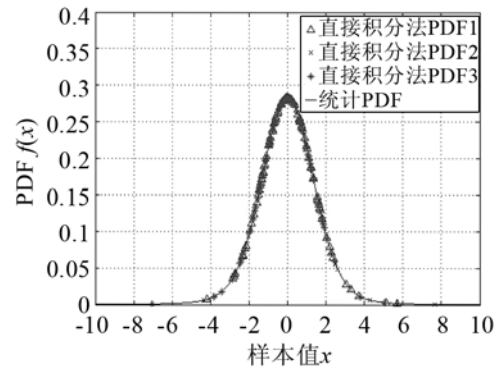
而 S 参数系下特征函数在 $\alpha=1, \beta \neq 0$ 时不连续, 因此采用直接数值积分法^[8]来计算概率密度函数值。首先对 S^1 参数系下的特征函数进行数值积分, 克服 S 参数系下的不连续性, 然后利用 S 参数系与 S^1 参数系下参数间的变换关系及 αS 分布的两个基本性质, 即可计算出 S 参数系下的概率密度函数值。

通过运用上述 αS 分布随机变量生成方法, 分别产生三组不同参数组合的 1000 点稳定分布随机变量序列。同时利用产生的随机变量序列通过直接数值积分法计算出概率密度函数值, 并与统计 PDF 进行性能分析比较, 如图 1~3 所示。

由图 1(a)~3(a)可以看出, αS 分布随机变量随着特征指数 α 的减小, 其尖峰脉冲性越显著。而由

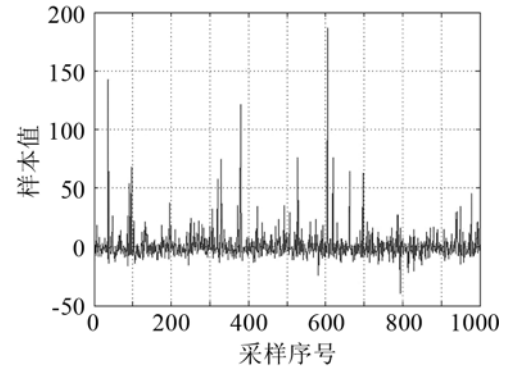


(a) $S(1.8, 0, 1, 0)$ 分布序列

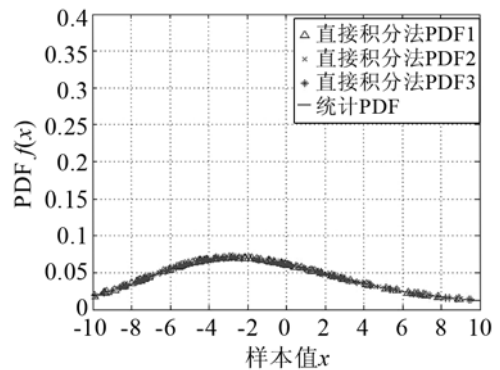


(b) $S(1.8, 0, 1, 0)$ 分布的 PDF

图1 $S(1.8, 0, 1, 0)$ 分布序列及 PDF
Fig.1 The sequence and PDF of $S(1.8, 0, 1, 0)$



(a) $S(1.5, 0.8, 4, 1)$ 分布序列



(b) $S(1.5, 0.8, 4, 1)$ 分布的 PDF

图2 $S(1.5, 0.8, 4, 1)$ 分布序列及 PDF
Fig.2 The sequence and PDF of $S(1.5, 0.8, 4, 1)$

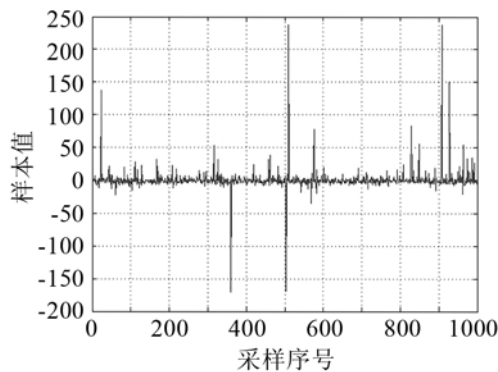
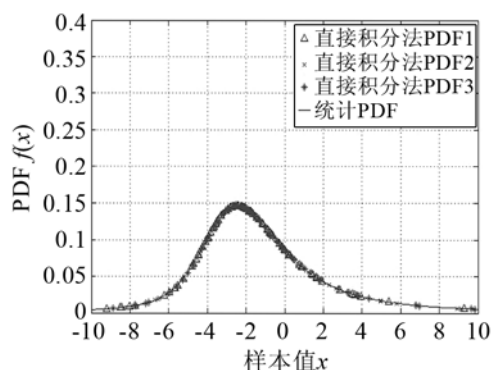
(a) $S(1.2, 0.5, 2, 1)$ 分布序列(b) $S(1.2, 0.5, 2, 1)$ 分布的 PDF图 3 $S(1.2, 0.5, 2, 1)$ 分布序列及 PDFFig.3 The sequence and PDF of $S(1.2, 0.5, 2, 1)$

图 1(b)~3(b)可知, 本文方法产生的随机变量序列通过直接积分法得到的 PDF 与 αS 分布的统计 PDF 拟合性能很好, 验证了本方法的正确性。

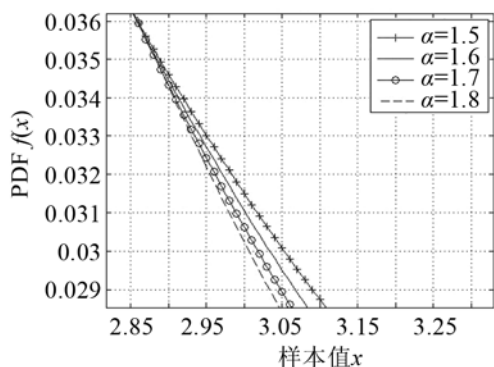
图 4 $S_\alpha(0, 1, 0)$ 分布的 PDF 拖尾Fig.4 The PDF tails of $S_\alpha(0, 1, 0)$

图 4 绘出了不同 α 取值下的 αS 分布 PDF 拖尾比较, 可进一步演示验证 αS 分布的特性: α 取值越小, 其拖尾越厚, 说明大样本发生概率越高, 非高斯脉冲性越强; 反之, α 取值越大, 其拖尾越薄,

说明大样本发生概率越低, 非高斯脉冲性越弱。

4 结束语

本文详细介绍了如何在标准参数系下产生 αS 分布随机变量的方法, 即利用 S^1 、 S^2 参数系与 S 参数系参数间的转换关系来产生随机变量, 克服了 S 系不便于理论分析和推导的缺点。

通过产生三组不同参数组合的 αS 分布随机变量序列, 对产生的序列直接积分求 PDF 并与 αS 分布的统计 PDF 进行性能比较, 结果拟合非常好, 验证了产生方法的正确性和有效性。本文的随机变量产生方法能产生 $S\alpha S$ 分布随机变量, 这为后续主动声呐抗混响信号处理研究能提供准确的仿真数据基础, 是值得深入研究的。

参 考 文 献

- [1] 吕晓蕊. Alpha 稳定分布的模型仿真及参数估计[D]. 武汉: 华中科技大学, 2008.
LÜ Xiaorui. Modeling simulation and parameter estimation of alpha stable distribution[D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2008.
- [2] 王汗青. 基于对称 Alpha 稳定分布的水声信号处理技术研究[D]. 武汉: 海军工程大学, 2012.
WANG Hanqing. Study on underwater acoustic signals processing based on symmetrical alpha stable distribution[D]. Wuhan: Naval University of Engineering, 2012.
- [3] 邱天爽, 张旭秀, 李小兵, 等. 统计信号处理: 非高斯信号处理及其应用[M]. 北京: 电子工业出版社, 2004.
QIU Tianshuang, ZHANG Xuxiu, LI Xiaobing, et al. Statistical signal processing: non-gaussian signal processing and its application[M]. Beijing: Electronic Industry Press, 2004.
- [4] Shao M, Nikias C L. Signal processing with fractional lower order moments: stable processes and their applications[J]. Proceedings of the IEEE, 1993, 81(7): 986-1010.
- [5] 朱埜. 主动声呐检测信息原理[M]. 北京: 海洋出版社, 1990.
ZHU Ye. Information principles of active sonar signal detection [M]. Beijing: Ocean Press, 1990.
- [6] Whalen A D. Detection of signals in noise[M]. New York: Academic Press, 1971.
- [7] Rafał Weron. On the Chambers-Mallows-S-tuck method for simulating skewed stable random variables[J]. Statistics & Probability Letters, 1996, 28(2): 165-171.
- [8] Nolan J P. An algorithm for evaluating stable densities in zolotarev's parameterization[J]. Mathematical and Computer Modelling, 1999, 29(3): 229-235.