

小波阈值法在信号滤波中的应用研究

盛成明¹, 唐锁夫¹, 刘超²

(1. 海军702厂, 上海 200434; 2. 海鹰集团, 江苏无锡 214000)

摘要: 针对硬阈值函数在阈值处不连续, 重构信号易产生振荡, 以及软阈值函数的量化值与原始小波系数有恒定的偏差不能逼近的问题, 提出了一种既能在阈值处连续, 又能实现逼近原始小波系数的改进型阈值函数。仿真结果显示将改进型的阈值函数用于信号滤波, 在均方误差和信噪比方面都优于传统的两种阈值函数。

关键字: 阈值函数; 小波; 滤波

中图分类号: TN911.72

文献标识码: A

文章编号: 1000-3630(2014)-05-0481-04

DOI 编码: 10.3969/j.issn1000-3630.2014.05.019

The application study of wavelet threshold method for signal filtering

SHENG Cheng-ming¹, TANG Suo-fu¹, LIU Chao²

(1. The No.702 Factory of Navy, Shanghai 200434, China; 2. HaiYing Group, Wuxi 214000, Jiangsu, China)

Abstract: According to the fact that oscillation occurs in the reconstruction signal because of discontinuous threshold function at threshold point and the fact that an approximate problem arises owing to the permanent bias between quantized value of soft threshold function and original wavelet coefficient, a modified threshold function is proposed. The modified function is continuous at threshold point and can approximate the original wavelet coefficient. The results of simulation demonstrate that the modified threshold function is superior to traditional methods in both MSE and SNR.

Key words: threshold function; wavelet; filter

0 引言

随着工程实践和理论分析的需要, 经典傅里叶变换从不同角度衍生了诸如短时傅里叶变换、小波变换、分数傅里叶变换等理论。小波变换以其优越的时-频局部化分析能力在工程实践中得到了广泛应用^[1,2]。小波变换通过从粗到细不断改变尺度, 从而将研究对象的任何变换充分展示, 近些年在信号滤波方面也取得了许多研究成果。小波域滤波通过小波变换方法对研究对象进行多层分解, 由阈值函数对分解后得到的高频小波系数进行阈值量化, 再由量化后的小波系数重构而得到真实信号的逼近。由此易知, 阈值函数的选取对滤波效果将会产生直接影响。对于阈值函数的选取, 大量研究人员也进行了一定的探索^[3]。

本文通过对典型的阈值函数进行理论分析, 提出了一种改进型的阈值函数, 并和采用传统阈值函数的滤波效果进行对比。仿真结果表明, 本文提出

的改进型阈值函数在均方误差与信噪比方面都有一定改进。

1 小波阈值滤波原理

定义观测信号

$$y(n) = x(n) + w(n) \quad (1)$$

其中: $x(n)$ 为原始信号, $w(n)$ 为噪声, 且相互统计独立。

选择一个合适的小波函数, 对 $y(n)$ 进行 N 层分解, 得到一系列小波系数^[4]。由于在某些工程实际中, 信号一般表现为频率较低或是平稳, 而噪声通常表现为较高频率。通过小波多尺度分解产生的低频小波系数反映的是信号的逼近部分, 高频系数反映的是信号的细节部分。因此, 对第一层到第 N 层中的各层高频小波系数进行阈值量化得到估计小波系数, 再通过小波逆变换实现信号的滤波, 即信号的估计 $x_1(n)$ ^[5,6]。具体实现方式如图 1 所示。

图 1 中, A_j 为各层分解的低频系数, D_j 为各层分解的高频系数。 DD_j 为经过阈值函数量化后得到的高频系数, 由图 1 可知, 通过式(2)进行信号重构, 即可实现信号的滤波。

收稿日期: 2013-05-08; 修回日期: 2013-07-11;

作者简介: 盛成明(1962—), 男, 浙江宁波人, 高级工程师, 研究方向为水声信号处理技术。

通讯作者: 唐锁夫, Email: tsf2000@163.com

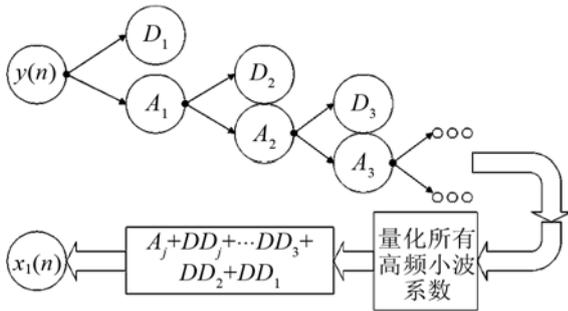


图 1 小波阈值滤波实现方式

Fig.1 Implementation method of wavelet threshold filtering

$$x_1(n) = A_j + DD_j + \dots + DD_2 + DD_1 \quad (2)$$

2 阈值函数的分析和改进

在小波系数阈值量化过程中，最具有代表性的阈值函数是硬阈值函数和软阈值函数，下面将通过硬阈值函数和软阈值函数的分析，给出改进型阈值函数。

2.1 硬阈值函数

设阈值为 $\lambda > 0$ ，硬阈值函数定义为

$$f(x) = \begin{cases} x, & |x| \geq \lambda \\ 0, & |x| < \lambda \end{cases} \quad (3)$$

即对自变量在阈值以下的函数值直接清零，阈值以上的函数值等于自变量的值。易知，函数在 λ 处不连续，且出现第一类间断点。

2.2 软阈值函数

软阈值函数定义如下：

$$f(x) = \begin{cases} \text{sign}(x) * (|x| - \lambda), & |x| \geq \lambda \\ 0, & |x| < \lambda \end{cases} \quad (4)$$

其中 $\text{sign}(\cdot)$ 为符号函数，软阈值函数相当于对硬阈值函数曲线平移了 λ 个单位，实现了 λ 处曲线的连续。

2.3 改进型阈值函数

上述定义的软、硬阈值函数具有如下特点^[7]：

硬阈值函数在阈值处不连续，重构信号易产生振荡；软阈值函数的量化值与原始小波系数有恒定的偏差不能逼近。为了在一定程度上克服上述阈值函数的不足，本文构造一个新的阈值函数如下：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x-\lambda| * 2^{\alpha|x-\lambda|}}{|x-\lambda| + 2^{\alpha|x-\lambda|}}, & |x| \geq \lambda \\ 0, & |x| < \lambda \end{cases} \quad (5)$$

其中 $\alpha > 0$ ，为可变参数。

对于函数 $f_1(x) = \frac{x * 2^{\alpha x}}{x + 2^{\alpha x}}$ ，易知，

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{x * 2^{\alpha x}}{x + 2^{\alpha x}} / x \right\} = 1 \quad (6)$$

且 $f_1(x) = 0, (x=0)$ 。因此，本文提出的新阈值函数既能在 λ 处连续，又能逼近原始小波系数。

2.4 三种阈值函数特点分析

为了更好地分析三种阈值函数的特点，图 2 给出了 3 种阈值的函数曲线，其中取 $\alpha = 0.1$ 。

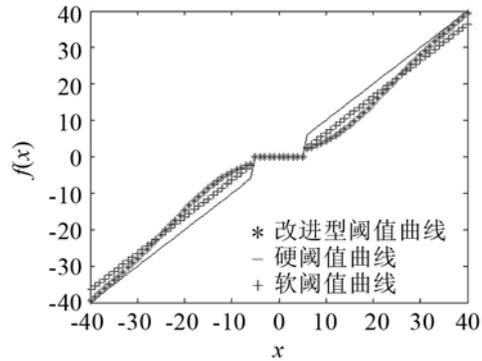


图 2 三种阈值函数曲线

Fig.2 Three kinds of threshold function curves

由图 2 易知，硬阈值函数对阈值以下的数值清零，满足小波阈值滤波的要求，但是函数在 $x = \lambda$ 处不连续，出现了第一类间断点，因此对小波系数进行阈值处理后再重构的信号易产生振荡现象^[8]，不利于含噪声信号的重构。

软阈值函数改善了硬阈值函数在 $x = \lambda$ 处不连续、易引起重构信号振荡的不足，但由于软阈值函数对在阈值以上的小波系数也同样做了量化，且量化后的值与原始小波系数有一个恒定的偏差 λ ，不能够满足对小波系数的逼近，因此信号重构效果也并不好。

改进型的阈值函数对硬阈值函数的不连续性和软阈值函数的不能逼近性都进行了改善，同时，可变参数 α 可以根据实际情况进行调整，实现比硬阈值函数与软阈值函数更佳的滤波效果，因此应用将更加灵活。

3 信号滤波仿真分析

本文采用 sym4 小波，对信噪比为 40 dB、幅值为 10、频率为 50 Hz 的单频正弦信号进行 3 层分解，采样频率为 2 kHz。其中噪声是方差为 1 的高斯白噪声。分别利用硬阈值函数、软阈值函数和改进型的阈值函数对各层高频系数进行阈值处理并进行信号重构。其中， α 取 0.1，阈值 λ 采用通用阈值^[9]。

$$\lambda = \sigma \sqrt{2 \ln N} \quad (7)$$

式中： σ 为噪声的均方差； N 为信号长度。三种阈值函数的滤波结果如图 3 所示。

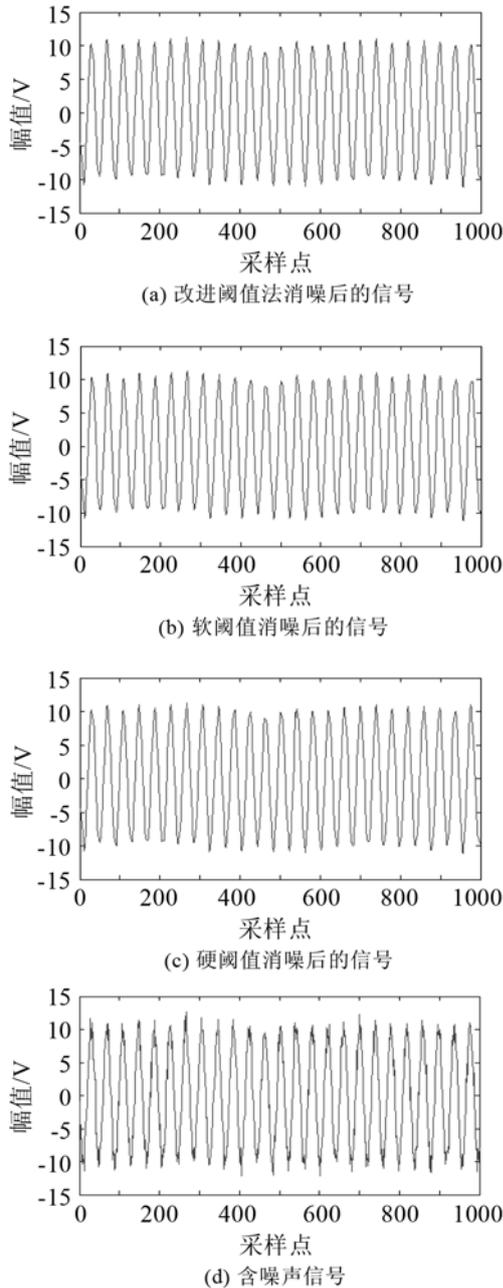


图 3 三种阈值函数滤波结果

Fig.3 Filtering results of three threshold functions

由图 3 可知，三种阈值函数都有一定的滤波效果，但是三种阈值函数的滤波效果无法直观地进行对比，因此，定义如下参数：

$$SNR = 10 \lg \frac{\sum_{n=1}^N x(n)^2}{\sum_{n=1}^N (x(n) - \hat{x}(n))^2} \quad (8)$$

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x(n) - \hat{x}(n))^2 \quad (9)$$

其中： SNR 为滤波后的信噪比， MSE 为信号滤波后

的均方误差^[10]； $x(n)$ 为原始信号； $\hat{x}(n)$ 为滤波后的重构信号。

为研究三种阈值函数在不同条件下的滤波效果，因此仿真时通过改变参数 α 以及信噪比以对比滤波效果，现将 20 dB 与 10 dB 时的滤波效果做如下对比，结果分别如表 1、2 所示。

表 1 20 dB 条件下滤波效果对比

Table 1 MSE and SNR of three threshold functions (20 dB)

硬阈值函数		软阈值函数		改进型阈值函数		
MSE	SNR	MSE	SNR	MSE	SNR	α
0.2757	52.04	0.2691	52.28	0.2670	52.36	0.1
0.3050	51.03	0.2919	51.47	0.2889	51.57	0.2
0.2617	52.56	0.2636	52.49	0.2609	52.59	0.3
0.2767	52.01	0.2673	52.35	0.2628	52.52	0.4

表 2 10 dB 条件下滤波效果对比

Table 2 MSE and SNR of three threshold functions (10 dB)

硬阈值函数		软阈值函数		改进型阈值函数		
MSE	SNR	MSE	SNR	MSE	SNR	α
0.3840	32.01	0.3831	32.26	0.3812	32.31	0.1
0.3993	31.03	0.3986	31.45	0.3970	31.56	0.2
0.3790	32.52	0.3803	32.47	0.3772	32.59	0.3
0.3840	32.01	0.3807	32.35	0.3790	32.52	0.4

由表 1、2 可知，改进型的阈值函数无论是从 MSE 或者 SNR 都表现了良好的性能，在实际具体应用时，改进型的阈值函数可以灵活地通过改变参数 α 来改变滤波性能，而硬阈值函数和软阈值函数一旦确定阈值，便无法进行改变。

4 结论

本文提出的改进型阈值函数，改善了硬阈值函数与软阈值函数的不足，通过对可变参数 α 进行调节，改进型阈值函数总能找到一个合适的 α ，使其在 MSE 和 SNR 方面优于硬阈值函数和软阈值函数。这对于需要同时考虑滤波效果以及波形失真度的应用场合则显得尤为有用。然而，由于改进型阈值函数中的参数 α 需要通过实验去确定最佳值，因此对于不确定环境的应用则尚有不足，需要进一步深入研究。

参 考 文 献

[1] 冉启文, 谭立英. 小波分析与分数傅里叶变换及应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2002.
RAN Qiwen, TAN Liying. Wavelet analysis and fractional Fourier transform and its application[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 2002.

[2] 邹红星, 周小波, 李衍达. 时频分析回溯与前瞻[J]. 电子学报, 2000, 28(9): 78-84.

- ZOU Hongxing, ZHOU Xiaobo, LI Yanda. Retrospective and prospective time-frequency analysis[J]. Journal of Electronics, 2000, 28(9): 78-84.
- [3] Donoho D L. De-noising by soft thresholding[J]. IEEE Trans on Inform Theory, 1995, 41(3): 613-627.
- [4] Donoho D L, Johnstone I M. Adapting to unknown smoothness Via Wavelet shrinkage[J]. Journal of American Stat Assoc, 1995, 90(432): 1200-1204.
- [5] 葛哲学. 小波分析理论与 Matlab R2007 实现[M]. 北京: 电子工业出版社, 2007.
GE Zhexue. Wavelet theory and Matlab R2007 implementation[M]. Beijing: Electronic Industry Press, 2007.
- [6] 高静怀, 汪文秉. 小波变换与信号瞬时特征分析[J]. 地球物理学报, 1997, 40(6): 821-832.
GAO Jinghuai, WANG Wenbing. Wavelet transform and signal characteristics of transient[J]. Chinese Journal of Geophysics, 1997, 40(6): 821-832.
- [7] 张维强, 宋国乡. 基于一种新的阈值函数的小波域去噪[J]. 西安电子科技大学学报, 2004, 31(2): 296-299.
ZHANG Weiqing, SONG Guoxiang. Signal de-noising in wavelet domain based on a new kind of thresholding function[J]. Journal of Xi-Dian University, 2004, 31(2): 296-299.
- [8] 王芳, 鲁顺昌. 小波软硬阈值去噪算法的研究及改进[J]. 信息技术, 2008(6): 124-127.
WANG Fang, LU Shunchang. Study and improvement of hard and soft thresholding Wavelet algorithm[J]. Information Technology, 2008(6): 124-127.
- [9] 叶重远, 黄永东. 小波阈值去噪算法的新改进[J]. 计算机工程与应用, 2011, 47(12): 141-144.
YE Chongyuan, HUANG Yongdong. The new improved wavelet thresholding algorithm[J]. Computer Engineering and Applications, 2011, 47(12): 141-144.
- [10] 付炜, 许山川. 一种改进的小波域阈值去噪算法[J]. 传感技术学报, 2006, 19(2): 534-540.
FU Wei, XU Shanchuan. An improved wavelet thresholding algorithm[J]. Sensing Technology, 2006, 19(2): 534-540.

中澳海洋科技交流会(ACOST)简介

“中澳海洋科技交流会”(Australia-China Ocean Science and Technology Symposium, 简称 ACOST)由源于 1997 年张叔英教授和他的研究组到澳大利亚的一次访问。当时, 他们用中国科学院声学研究所东海研究站研制的声学设备在澳大利亚悉尼港内进行了海底沉积物的勘测。在将近 10 年的科技合作之后, 张叔英教授和悉尼大学的 Ian Jones 教授考虑了如何进一步促进和增加两国海洋科技界的交流和合作的问题, 而一个有效的办法就是定期地举办“中澳海洋科技交流会”。这个想法在 2005 年向中国驻澳大利亚大使馆提出后得到了支持, 并于当年在澳大利亚首都堪培拉和悉尼举办了第一次交流会。其后, 随着两国在海洋环境、海洋资源和生态系统等方面的重视和进展, 出席各次交流会的两国学者逐次增多, 交流的海洋科技方面的主题和内容也更加丰富。并且, 两国有的单位之间已经签订了开展科技合作的协议。

至今已经举办的 4 次“中澳海洋科技交流会”的简况如下:

ACOST 1

时间地点: 2005 年 11 月, 澳大利亚 Canberra 和 Sydney
赞助单位: 中国驻澳大利亚大使馆、中国科学院和澳大利亚科学院
组织者: 悉尼大学 Ian Jones 教授和中国科学院声学研究所张叔英教授

ACOST 2

时间地点: 2009 年 11 月, 中国海南省海口市
赞助单位: 海南省环境科学研究院
组织者: 海南省环境科学研究院岳平院长和悉尼大学 Bruce Judd 博士

ACOST 3

时间地点: 2012 年 6 月, 澳大利亚 Townsville 和 Sydney
赞助单位: 悉尼大学和 James Cook 大学
组织者: 悉尼大学 Phil Mulhearn 博士、James Cook 大学和中国海洋大学王永红教授

ACOST 4

时间地点: 2014 年 9 月, 中国青岛市
赞助单位: 中国海洋大学
组织者: 中国海洋大学王永红教授和 Griffith 大学 Charles Lemckert 教授

摘译自中国海洋大学的“ACOST 4 会议通知书”



ACOST 的发起人: 张叔英教授
和 Ian Jones 教授