

基于 Mindlin 理论的厚阶梯圆盘弯曲振动特性研究

张 宁 宁

(渭南师范学院数理学院, 陕西渭南 714099)

摘要: 阶梯圆盘辐射体因其辐射面积大、辐射效率高等优点在大功率超声领域获得了广泛的应用。从声学应用角度, 基于 Mindlin 理论推导了厚阶梯圆盘在自由、固定、简支边界条件下的频率方程, 并分别对频率方程进行数值求解, 结果表明计算得到的频率与有限元模拟及实验测试结果基本相符。该结论为厚盘的弯曲振动辐射器的设计提供了理论参考。

关键词: Mindlin 理论; 厚阶梯圆盘; 频率方程; 弯曲振动

中图分类号: TB559

文献标识码: A

文章编号: 1000-3630(2016)-05-0472-07

DOI 编码: 10.16300/j.cnki.1000-3630.2016.05.016

Research on the flexural vibration characteristics of thick stepped circular plate based on the Mindlin theory

ZHANG Ning-ning

(Mathematics and Physics institute, Weinan Teachers University, Weinan 714099, Shaanxi, China)

Abstract: For its advantages in large radiating area and high radiation efficiency, the stepped circular plate radiator has been widely used in the field of high power ultrasound. The frequency equations of the thick circular plate in free, fixed and simply supported boundary conditions are deduced based on Mindlin theory from the viewpoint of acoustic application, and the frequency equation is numerically solved. The results show that the calculated frequency accords basically with the finite element simulation and experimental measurement. This conclusion provides a reference for the design of the bending vibration radiator of thick circular plate and a basis for the frequency adjustment.

Key words: Mindlin theory; the thick circular plate; the frequency equation; the bending vibration

0 引 言

阶梯圆盘是由平面圆盘改进而来的, 主要目的是将平面圆盘辐射声场中的相位相消降低到最低, 以提高辐射效率和声场的指向性^[1]。阶梯圆盘辐射体因其辐射面积大、辐射效率高等优点在大功率超声领域有着广泛的应用。由于阶梯圆盘频率方程复杂, 以前的许多文献并未给出其解法^[2-4]。经典薄板理论是基于 Kirchhoff 假设基础上, 并忽略了转动惯量的影响, 但随着板的厚径比(大于 1/5)的增大, 经典薄板理论的局限性明显增大^[5-7]。特别在高频大

功率声辐射条件下, 薄盘的机械强度明显不足, 因此应考虑厚板。大量文献对圆盘和阶梯圆盘的弯曲振动特性及其辐射声场的研究, 基本采用薄板理论^[8-18]。目前对于厚板理论, 最为著名的是 Reissner 理论和 Mindlin 理论。文献[19-20]应用 Mindlin 理论对厚圆盘弯曲振动进行理论、数值及实验研究, 其结果基本一致。从工程力学角度研究, 对于大功率的声学应用不但关心厚板的结构振动特性, 还希望在不同边界条件下, 能给出其相应的频率方程和位移解析解, 以有利于声学设计和声场的计算, 特别对大功率辐射器其关键部件的设计及应用非常重要, 但从声学应用角度, 对于厚阶梯圆盘的弯振特性研究较少。基于 Mindlin 理论从声学应用角度, 推导了厚阶梯圆盘在不同边界条件下的频率方程, 并分别对频率方程进行数值求解, 理论计算得到的频率与有限元模拟及实验测试结果基本相符, 该结论为解析法设计阶梯圆盘提供了参考, 也为弯曲振动辐射器的设计提供理论参考和频率调试依据。

收稿日期: 2015-10-12; 修回日期: 2016-01-20

基金项目: 陕西省教育厅自然科学专项(2015JK1250); 渭南师范学院物理专业综合建设项目(zz201437), 渭南师范学院科研计划重点项目(14YKF004), 渭南师范学院教育科学研究项目(2015JYKX019)

作者简介: 张宁宁(1978—), 女, 陕西西安人, 硕士, 讲师, 研究方向为功率超声及声学测量。

通讯作者: 张宁宁, E-mail: zhangning7892@163.com

1 阶梯厚圆盘弯曲振动

设一单阶梯厚圆盘可看作由两部分组成如图 1 所示。 O 、 O' 为对称轴，一部分为节线之外的圆环 B，其内外径分别为 a 、 b ，基底厚度为 h_1 ；另一部分为节线以内的圆盘 A，其半径为 a ，厚度为 h_2 ，由文献[13]可知 $h_2 = h_1 + \lambda/2$ (λ 为空气中的波长)。将 Mindlin 厚板理论应用于圆盘 A 和圆环 B，再利用 A 和 B 在内径 a 处的力和变形的连续边界条件及不同约束条件，就可计算出阶梯厚圆环在不同条件下的频率方程。

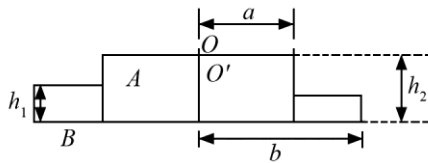


图1 厚阶梯圆盘示意图
Fig.1 Schematic diagram of thick stepped plate

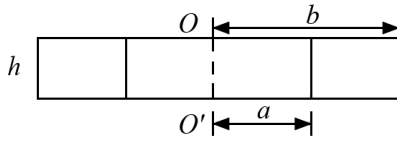


图2 厚圆环示意图
Fig.2 Schematic diagram of thick ring

1.1 Mindlin 厚板理论

假设厚圆环内外半径为 a 、 b ，厚度为 h 如图 2 所示， O 、 O' 为对称轴，上下表面不会受到切向力。取柱坐标 (r, θ, z) 的原点与盘中面中心重合， u_r 、 u_θ 、 w 分别表示盘质点径向、切向、 z 向的位移。对于圆环受力是关于 z 轴是对称的，圆环的弯曲振动也是对称与 z 轴，因此可不考虑 θ 方向上的位移，所以 $u_r = z\psi_r(r, t)$ ， $u_\theta = z\psi_\theta(r, t)$ ， $w = w_1 + w_2$ 。Mindlin 理论考虑横向剪切变形和转动惯量的影响，质点位移有如下形式：

$$u_r = z\psi_r(r, \theta, t), u_\theta = z\psi_\theta(r, \theta, t), w = w_1 + w_2 \quad (1)$$

$$\begin{cases} \psi_r = (\sigma_1 - 1) \frac{\partial w_1}{\partial r} + (\sigma_2 - 1) \frac{\partial w_2}{\partial r} \\ \psi_\theta = (\sigma_1 - 1) \frac{\partial w_1}{r \partial \theta} + (\sigma_2 - 1) \frac{\partial w_2}{r \partial \theta} \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{弯矩 } M_r = D \left[\frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \psi_r \right],$$

$$\text{剪力 } Q_r = k^2 Gh \left(\psi_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (3)$$

位移函数 w_1 、 w_2 分别满足：

$$(\nabla^2 + \delta_1^2) w_1 = 0, (\nabla^2 + \delta_2^2) w_2 = 0$$

其中： $\delta_1^2 = \frac{1}{2} \delta_0^4 (R + S \pm [(R - S)^2 + 4\delta_0^4]^{1/2})$ ， $\sigma_1, \sigma_2 = (\delta_1^2, \delta_2^2)(R\delta_0^4 - S^{-1})$ (角标 1 取正号，角标 2 取负号)； $R = h^2/12$ ， $S = D/k^2 Gh$ ， $\delta_0^4 = \rho \omega^2 h/D$ ， $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ ， $k^2 = \pi/12$ 。 ρ 、 ω 、 D 分别为厚圆环密度、角频率、弯曲刚度常数， R 、 S 表示转动惯量和横向剪切变形的影响， ν 为泊松比。弯矩 M_r 、 M_θ 、扭矩 $M_{r\theta}$ 以及剪力 Q_r 、 Q_θ 的表达式为：

$$\begin{aligned} \psi_r = & \delta_1(1 - \sigma_1)[A_1 J_1(\delta_1, r) + B_1 N_1(\delta_1, r)] + \\ & \delta_2(1 - \sigma_2)[A_2 J_1(\delta_2, r) + B_2 N_1(\delta_2, r)] \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} w = & A_1 J_0(\delta_1, r) + B_1 Y_0(\delta_1, r) + \\ & A_2 J_0(\delta_2, r) + B_2 Y_0(\delta_2, r) \end{aligned} \quad (5)$$

将式(4)、(5)代入式(3)可得：

$$\begin{aligned} M_r = & \left\{ \sum_{i=1}^2 A_i (\sigma_i - 1) [J_0''(\delta_i, r) + \frac{\nu}{r} J_0'(\delta_i, r)] \right\} + \\ & \left\{ \sum_{i=1}^2 B_i (\sigma_i - 1) [Y_0''(\delta_i, r) + \frac{\nu}{r} Y_0'(\delta_i, r)] \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

$$Q_r = k^2 Gh \left\{ \sum_{i=1}^2 [A_i \sigma_i J_0'(\delta_i, r) + B_i Y_0'(\delta_i, r)] \right\} \quad (7)$$

式中： $J_0(\delta_i r)$ 为零阶贝塞尔函数， $Y_0(\delta_i r)$ 为零阶诺伊曼函数， A_1 、 A_2 、 B_1 、 B_2 为由圆环边界条件决定的待定常数。

对圆盘而言，当 $r=0$ 时， w 不能无限大，且由对称性可知 $u_r(0, z) = 0$ ，只能 $B_1 = 0$ ， $B_2 = 0$ 。因此式(4)、(5)、(6)、(7)变为：

$$\psi_r = A_1 \delta_1 (1 - \sigma_1) J_1(\delta_1 r) + A_2 \delta_2 (1 - \sigma_2) J_1(\delta_2 r)$$

$$w = A_1 J_0(\delta_1 r) + A_2 J_0(\delta_2 r)$$

$$M_r = \left\{ \sum_{i=1}^2 A_i (\sigma_i - 1) [J_0''(\delta_i, r) + \frac{\nu}{r} J_0'(\delta_i, r)] \right\}$$

$$Q_r = k^2 Gh \left\{ \sum_{i=1}^2 [A_i \sigma_i J_0'(\delta_i, r)] \right\} \quad (8)$$

A_1 、 A_2 为由圆盘边界条件决定的待定常数。

1.2 不同边界条件下阶梯厚圆盘弯曲振动频率方程

圆盘 A 和圆环 B 在内径 a 处的力和变形应是连续的，因此 A、B 两部分在此处的横向位移、转角和弯矩、剪力应分别相等，即有耦合方程：

$$\begin{aligned} w_A|_{r=a} &= w_B|_{r=a}; \quad \psi_A|_{r=a} = \psi_B|_{r=a}; \\ M_{rA}|_{r=a} &= M_{rB}|_{r=a}; \quad Q_{rA}|_{r=a} = Q_{rB}|_{r=a} \end{aligned} \quad (9)$$

1.2.1 边界自由

圆环 B 边界自由，所以有边界条件：

$$M_{rB}|_{r=b} = 0; \quad Q_{rB}|_{r=b} = 0 \quad (10)$$

将式(4)~(7)代入式(9)、(10)，可得由待定系数 A_{B1} 、 A_{B2} 、 B_{B1} 、 B_{B2} 和 A_{A1} 、 A_{A2} 组成的方程组(11)。

$$\begin{aligned}
& A_{B1}J_0(\delta_1, a) + B_{B1}Y_0(\delta_1, a) + A_{B2}J_0(\delta_2, a) + \\
& B_{B2}Y_0(\delta_2, a) - A_{B1}J_0(\delta_1, a) - A_{B2}J_0(\delta_2, a) = 0 \\
& \delta_1(1-\sigma_1)[A_{B1}J_1(\delta_1, a) + B_{B1}N_1(\delta_1, a)] + \\
& \delta_2(1-\sigma_2)[A_{B2}J_1(\delta_2, a) + B_{B2}N_1(\delta_2, a)] - \\
& A_{A1}\delta_1(1-\sigma_1)J_1(\delta_1, a) + A_{A2}\delta_2(1-\sigma_2)J_1(\delta_2, a) = 0 \\
& \left\{ \sum_{i=1}^2 A_{Bi}(\sigma_i - 1)[J_0''(\delta_i, a) + \frac{\nu}{a}J_0'(\delta_i, a)] \right\} + \\
& \left\{ \sum_{i=1}^2 B_{Bi}(\sigma_i - 1)[Y_0''(\delta_i, a) + \frac{\nu}{a}Y_0'(\delta_i, a)] \right\} - \\
& \left\{ \sum_{i=1}^2 A_{Ai}(\sigma_i - 1)[J_0''(\delta_{Ai}, a) + \frac{\nu}{a}J_0'(\delta_{Ai}, a)] \right\} = 0 \\
& \sum_{i=1}^2 [A_{Bi}\sigma_i J_0'(\delta_i, a_1) + B_{Bi}Y_0'(\delta_i, a)] - \sum_{i=1}^2 [A_{Ai}\sigma_i J_0'(\delta_i, a)] = 0 \\
& \left\{ \sum_{i=1}^2 A_{Bi}(\sigma_i - 1)[J_0''(\delta_i, b) + \frac{\nu}{b}J_0'(\delta_{Bi}, b)] \right\} + \\
& \left\{ \sum_{i=1}^2 B_{Bi}(\sigma_i - 1)[Y_0''(\delta_i, b) + \frac{\nu}{b}Y_0'(\delta_i, b)] \right\} = 0 \\
& \left\{ \sum_{i=1}^2 [A_{Bi}\sigma_i J_0'(\delta_i, b) + B_{Bi}Y_0'(\delta_i, b)] \right\} = 0 \quad (11)
\end{aligned}$$

1.2.2 边界固定

圆环 B 边界固定, 所以有边界条件:

$$\varpi_{rB}|_{r=b} = 0; \quad \varpi'_{rB}|_{r=b} = 0 \quad (12)$$

将式(4)~(7)代入式(9)、(12), 可得由待定系数

A_{B1} 、 A_{B2} 、 B_{B1} 、 B_{B2} 和 A_{A1} 、 A_{A2} 组成的方程组(13)。

$$\begin{aligned}
& A_{B1}J_0(\delta_1, a) + B_{B1}Y_0(\delta_1, a) + A_{B2}J_0(\delta_2, a) + \\
& B_{B2}Y_0(\delta_2, a) - A_{B1}J_0(\delta_1, a) - A_{B2}J_0(\delta_2, a) = 0 \\
& \delta_1(1-\sigma_1)[A_{B1}J_1(\delta_1, a) + B_{B1}N_1(\delta_1, a)] + \\
& \delta_2(1-\sigma_2)[A_{B2}J_1(\delta_2, a) + B_{B2}N_1(\delta_2, a)] - \\
& A_{A1}\delta_1(1-\sigma_1)J_1(\delta_1, a) + A_{A2}\delta_2(1-\sigma_2)J_1(\delta_2, a) = 0 \\
& \left\{ \sum_{i=1}^2 A_{Bi}(\sigma_i - 1)[J_0''(\delta_i, a) + \frac{\nu}{a}J_0'(\delta_i, a)] \right\} + \\
& \left\{ \sum_{i=1}^2 B_{Bi}(\sigma_i - 1)[Y_0''(\delta_i, a) + \frac{\nu}{a}Y_0'(\delta_i, a)] \right\} - \\
& \left\{ \sum_{i=1}^2 A_{Ai}(\sigma_i - 1)[J_0''(\delta_{Ai}, a) + \frac{\nu}{a}J_0'(\delta_{Ai}, a)] \right\} = 0 \\
& \sum_{i=1}^2 [A_{Bi}\sigma_i J_0'(\delta_i, a_1) + B_{Bi}Y_0'(\delta_i, a)] - \\
& \sum_{i=1}^2 [A_{Ai}\sigma_i J_0'(\delta_i, a)] = 0 \\
& A_{B1}J_0(\delta_1, b) + B_{B1}Y_0(\delta_1, b) + A_{B2}J_0(\delta_2, b) + \\
& B_{B2}Y_0(\delta_2, b) = 0 \\
& A_{B1}J_0'(\delta_1, b) + B_{B1}Y_0'(\delta_1, b) + \\
& A_{B2}J_0'(\delta_2, b) + B_{B2}Y_0'(\delta_2, b) = 0 \quad (13)
\end{aligned}$$

1.2.3 边界简支

圆环 B 边界简支, 所以有边界条件:

$$M_{rB}|_{r=b} = 0; \quad \varpi_{rB}|_{r=b} = 0 \quad (14)$$

将式(4)~(7)代入式(9)、(14), 可得由待定系数

A_{B1} 、 A_{B2} 、 B_{B1} 、 B_{B2} 和 A_{A1} 、 A_{A2} 组成的方程组(15)。

$$\begin{aligned}
& A_{B1}J_0(\delta_1, a) + B_{B1}Y_0(\delta_1, a) + A_{B2}J_0(\delta_2, a) + \\
& B_{B2}Y_0(\delta_2, a) - A_{B1}J_0(\delta_1, a) - A_{B2}J_0(\delta_2, a) = 0 \\
& \delta_1(1-\sigma_1)[A_{B1}J_1(\delta_1, a) + B_{B1}N_1(\delta_1, a)] + \\
& \delta_2(1-\sigma_2)[A_{B2}J_1(\delta_2, a) + B_{B2}N_1(\delta_2, a)] - \\
& A_{A1}\delta_1(1-\sigma_1)J_1(\delta_1, a) + A_{A2}\delta_2(1-\sigma_2)J_1(\delta_2, a) = 0 \\
& \left\{ \sum_{i=1}^2 A_{Bi}(\sigma_i - 1)[J_0''(\delta_i, a) + \frac{\nu}{a}J_0'(\delta_i, a)] \right\} + \\
& \left\{ \sum_{i=1}^2 B_{Bi}(\sigma_i - 1)[Y_0''(\delta_i, a) + \frac{\nu}{a}Y_0'(\delta_i, a)] \right\} - \\
& \left\{ \sum_{i=1}^2 A_{Ai}(\sigma_i - 1)[J_0''(\delta_{Ai}, a) + \frac{\nu}{a}J_0'(\delta_{Ai}, a)] \right\} = 0 \\
& \sum_{i=1}^2 [A_{Bi}\sigma_i J_0'(\delta_i, a_1) + B_{Bi}Y_0'(\delta_i, a)] - \\
& \sum_{i=1}^2 [A_{Ai}\sigma_i J_0'(\delta_i, a)] = 0 \\
& \left\{ \sum_{i=1}^2 A_{Bi}(\sigma_i - 1)[J_0''(\delta_i, b) + \frac{\nu}{b}J_0'(\delta_i, b)] \right\} + \\
& \left\{ \sum_{i=1}^2 B_{Bi}(\sigma_i - 1)[Y_0''(\delta_i, b) + \frac{\nu}{b}Y_0'(\delta_i, b)] \right\} = 0 \\
& A_{B1}J_0(\delta_1, b) + B_{B1}Y_0(\delta_1, b) + \\
& A_{B2}J_0(\delta_2, b) + B_{B2}Y_0(\delta_2, b) = 0 \quad (15)
\end{aligned}$$

因为式(11)、(13)、(15)各方程组中相应待定系数 A_{B1} 、 A_{B2} 、 B_{B1} 、 B_{B2} 和 A_{A1} 、 A_{A2} 不全为零, 所以要使相应方程组得到非零解, 上述三种边界条件对应的各六个方程组成的方程组的系数行列式必须等于零, 可统一写为以下形式。

$$\begin{vmatrix}
D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\
D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \\
D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\
D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\
D_{51} & D_{52} & D_{53} & D_{54} & D_{55} & D_{56} \\
D_{61} & D_{62} & D_{63} & D_{64} & D_{65} & D_{66}
\end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

式(16)即为三种边界条件下的厚阶梯圆盘频率方程, 其为超越方程, 因此采用数值法求解。当边界条件给定、材料参数与几何参数确定时, 则可通过式(14)得频率。将所求频率代入分别式(11)、(13)、(15)计算出相应系数 A_{B1} 、 A_{B2} 、 B_{B1} 、 B_{B2} 和 A_{A1} 、 A_{A2} , 再将结果代回式(4)~(7), 可得不同边界条件下的径向与横向位移。

2 有限元分析

为了验证频率方程求解的精度, 对计算结果进

行了有限元模态分析。取阶圆盘材料为 45 号钢，密度为 $\rho=7.8\times10^3\text{ kg/m}^3$ ，泊松比为 $\nu=0.28$ ，弹性模量为 $E=21.6\times10^{10}\text{ N/m}^2$ ，剪切模量为 $G=8.4\times10^{10}\text{ N/m}^2$ 。由文献[13]可得 $h_2=h_1+\lambda/2$ (λ 为空气中的波长)，因此取几何参数内外半径为 35 mm、72 mm， h_1 、 h_2 为 16、24 mm，在 ANSYS10.0 下建立阶圆盘模型，采用 8 节点的 SOLID45 单元进行智能自由网格划分，模态提取方法为 Block Lanczo，频率提取范围为 1~70 kHz。在自由边界条件下，模态分析得到阶圆盘分别在频率 5.619 kHz、36.333 kHz、56.860 kHz 处作轴对称的纯弯曲振动，如图 3 所示，在其余频率均为复杂振型。从表 1 的比较可以看出模态分析的频率 f_2 与利用式 (11)理论计算的结果 f_1 非常吻合，模拟值与理论值的差 Δf 很小。

表 1 厚阶圆盘计算频率与有限元计算结果的比较

Table 1 Comparison of the calculated frequencies by analytic method and by finite element method for the thick stepped plate with a variable thickness

振动模式 n	f_1/kHz	f_2/kHz	$\Delta f/\%$
1	5.688	5.619	1.23
2	37.11	36.33	2.14
3	58.55	56.86	2.98

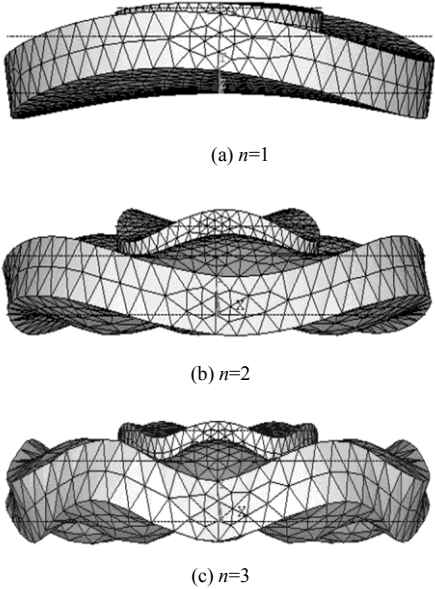


图 3 阶圆盘的轴对称弯曲振动前三阶振型($n=1, 2, 3$)
Fig.3 The first three order modes of the axial symmetric flexural vibration of the stepped plate ($n=1, 2, 3$)

3 数值计算

为了进一步研究不同边界条件下阶梯厚圆盘的弯曲振动特性，利用数值计算对不同厚度的阶梯圆盘的前三阶共振频率进行研究。表 2、3 分别为

表 2 不同厚度 h_1 弯曲振动阶梯圆盘共振频率计算结果(单位: kHz)

Table 2 The calculated resonant frequencies of the thick stepped plates with different height h_1 (unit: kHz)

h_1/mm	厚径比 h_1/R_2	振动模 数 n	边界自由			边界固定			边界简支		
			f_0	f_1	f_2	f_0	f_1	f_2	f_0	f_1	f_2
12	0.166	1	5.5230	5.4580	5.3160	1.6470	1.5340	1.4590	1.6840	1.3870	1.3570
		2	35.781	35.482	34.406	37.481	37.114	35.684	37.441	36.584	35.224
		3	54.524	54.116	52.829	55.781	54.871	53.412	54.479	53.246	52.856
14	0.194	1	5.8840	5.6710	5.4780	2.0120	1.9920	1.8560	1.9850	1.8760	1.7840
		2	37.821	37.214	35.617	38.847	38.645	36.248	38.549	37.158	36.114
		3	57.148	56.249	54.268	58.267	56.884	55.147	56.581	55.684	54.842
16	0.222	1	6.7410	5.6880	5.6190	3.4540	2.6510	2.1320	3.5740	2.8460	2.1150
		2	41.215	37.110	36.333	40.558	37.865	37.211	40.267	37.482	36.382
		3	66.624	58.554	56.860	67.614	58.447	57.439	67.248	58.117	56.906
18	0.250	1	7.8410	6.1480	5.8120	3.8750	2.7860	2.4040	3.7410	2.8520	2.3480
		2	46.235	39.254	37.247	45.689	39.557	38.329	44.816	39.242	37.597
		3	68.567	60.543	58.158	69.472	61.114	59.170	68.597	59.224	58.872
20	0.277	1	8.1120	6.1470	5.9310	5.6840	3.8540	3.2580	5.4170	3.7480	3.1470
		2	47.585	40.218	38.312	48.628	40.627	39.784	48.115	40.582	39.845
		3	70.258	61.257	59.154	71.462	62.324	60.482	70.359	62.821	59.226
22	0.305	1	9.5750	7.4150	6.1270	6.2570	5.1240	4.8610	6.3210	4.7590	4.5870
		2	48.681	42.324	39.458	49.685	42.226	40.785	49.228	42.157	40.281
		3	84.972	63.249	60.249	85.226	63.557	60.648	84.297	62.784	60.441
24	0.333	1	11.259	7.1180	6.4490	11.245	6.8540	6.1250	11.359	6.7540	6.0180
		2	49.556	43.352	41.459	50.267	44.125	42.078	49.587	44.257	41.874
		3	90.614	66.148	63.223	91.257	67.214	63.894	90.681	66.858	63.228

表 3 不同厚度 h_2 弯曲振动阶梯圆盘共振频率计算结果(单位: kHz)
Table 3 The calculated resonant frequencies of the thick stepped plates with different height h_2 (unit: kHz)

h_2/mm	厚径比 h_2/R_2	振动模 数 n	边界自由		边界固定		边界简支	
			f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2
24	0.333	1	5.8740	5.6190	2.4710	2.1320	2.3570	2.1150
		2	36.842	36.333	38.254	37.211	37.984	36.382
		3	87.415	56.860	58.784	57.439	58.462	56.906
28	0.388	1	5.9470	5.8120	2.6510	2.2160	2.4580	2.1980
		2	38.841	37.247	40.158	38.418	39.247	38.214
		3	60.216	58.158	60.127	58.874	59.475	57.684
32	0.444	1	6.3120	5.9310	2.6870	2.3870	2.5760	2.2680
		2	39.458	38.312	41.249	39.467	39.412	38.571
		3	61.234	59.154	61.114	59.249	60.541	58.746
36	0.500	1	6.7810	6.1270	2.8940	2.6160	2.6850	2.4710
		2	41.217	39.458	42.457	40.125	41.157	39.548
		3	61.785	60.249	62.547	60.002	62.572	60.117
40	0.555	1	8.8490	6.4490	5.6870	3.5120	5.5870	3.3210
		2	56.213	41.459	57.664	41.378	56.228	41.117
		3	78.482	63.223	77.848	62.784	76.754	61.258
44	0.611	1	10.481	7.8480	8.4170	4.6210	8.2670	4.4570
		2	50.442	43.734	50.312	43.215	49.567	42.841
		3	99.157	65.765	98.114	65.289	97.796	63.784

内外径 R_1 、 R_2 不变, 不同边界条件下频率随厚度 h_1 、 h_2 的变化, 其中 f_0 为薄板计算结果, f_1 为厚板计算结果, f_2 为模拟结果。

由表 2 可以看出, 当其他参数不变时, 不同边界条件下的厚阶梯圆盘理论计算所得前三阶频率与有限元计算得到的频率基本符合, 随着基底厚度 h_1 的增加, 各阶频率也在增加。但是也可看出, 随着厚度的增加, 薄板计算的频率值与有限元和厚板理论计算值的误差在逐渐增大, 特别是厚径比大于 0.2 以后差别更大, 表明此时, 薄板理论不再适用了。

由表 3 可以看出当厚度 h_2 由 24 mm 变化到 36 mm 时, 在三种不同边界条件下, 理论计算所得前三阶频率与有限元计算得到的频率基本符合, 误差较小, 但当 h_2 大于 36 mm 时, 误差较大, 其原因在于本文所用的中厚板理论的使用范围是厚径比小于 0.5, 当 h_2 大于 36 时厚径比大于 0.5, 此时本文理论不再适用。

图 4 和图 5 分别是有限元法计算阶梯圆盘沿半径方向的弯振一阶和二阶位移分布图, 一阶、二阶弯振时振动节线位置与由式(4)和(5)理论值基本一致, 这也表明本文理论的正确性。

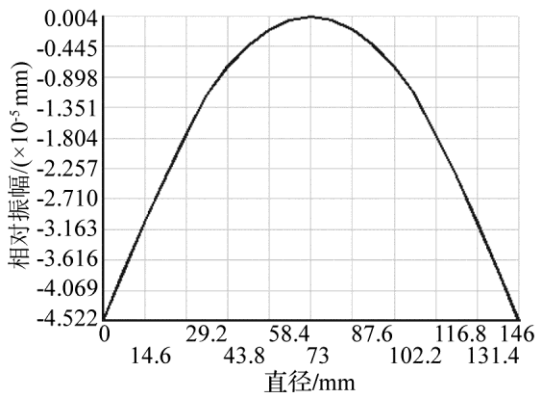


图 4 有限元模拟一阶位移分布图
Fig.4 Displacement distribution of the first order mode by finite element method

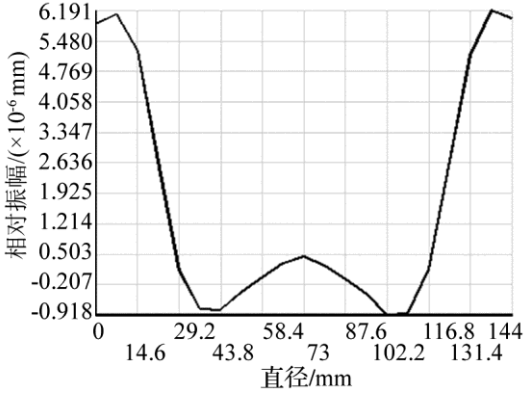


图 5 有限元模拟二阶位移分布图
Fig.5 Displacement distribution of the second order mode by finite element method

4 实验

为了验证以上结论,若阶梯圆盘的内外半径为 35 mm、72 mm,厚度为 $h_1=16$ mm、 $h_2=24$ mm,厚径比为 0.333,在自由边界条件下对其一阶弯曲振动的频率和节圆半径进行测试。采用如图 6 所示装置,图中 FP 是待测阶梯圆盘,ET 是发射换能器,测量时,调节低频信号发生器的频率使纵向振动夹心式换能器和阶梯圆盘工作在共振频率上,缓慢移动激光测振仪使激光沿待测圆盘的半径方向移动,通过示波器观察圆盘上测试点的振动波形振幅,振幅最小处所对应的测试点即为节点,记录节点和圆盘中心的距离,即为节圆半径。振动系统的共振频率可通过频率计读出。在移动激光测振仪的过程中,必须保持激光的入射方向与阶梯圆盘垂直。测得阶梯圆盘产生一阶弯曲振动时的频率为 5 246 Hz,节圆半径为 35.32 mm,和阶梯位置并不完全重合。因此在实际大功率应用场合,对阶梯圆盘的阶梯半径进行修正,使阶梯圆盘工作时,节圆位置与阶梯位置重合,达到较高的辐射效率。实验所测频率与表 1 中理论计算结果及有限元分析结果基本一致,三者吻合较好,计算精度完全满足需要。实验误差一方面来自材料参数的理论值和实际值的差别,另一方面由于机械加工的原因,换能器的辐射端面与阶梯圆盘不一定紧紧相连。

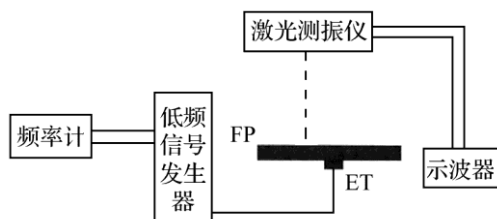


图6 阶梯圆盘弯曲振动共振频率实验组图

Fig.6 Experimental layout for flexural vibration frequency measurement of stepped plate

5 结论

通过对厚阶梯圆盘弯曲振动的研究可得以下结论:

(1) 经典理论只适用于薄板低频振动,而中厚板理论不仅适用于薄板,也适用与中厚板的弯曲振动的研究。

(2) 基于 Mindlin 理论,推导了厚阶梯圆盘弯曲振动径向与横向位移解析表达式,以及固定、

自由、简支边界条件下的频率方程。由频率方程计算得到的弯曲振动振型对应的频率与有限元及实验测试结果基本相符,表明本文理论的正确性。

(3) 研究了三种边界条件下厚阶梯圆盘基底厚度、圆盘厚度对弯曲振动频率的影响,结果表明,当其他参数一定时,在厚径比小于 0.5 范围内,各阶频率随圆盘基底厚度、圆盘厚度的增加而增加,其结论为厚阶梯圆盘弯振辐射器的设计提供了理论参考。

参 考 文 献

- [1] Gallego Juarez J A. Axisymmtric vibrations of circual plates with stepped thickness[J]. Journal of Sound and Vibration, 1973, 26(3): 411-416.
- [2] Gallego J A. A xisymmtric vibrations of circular plates with steeped thickness [J]. Journal of sound and vibration, 1973, 26(3): 411-416.
- [3] Gallego J, Rodriguez G, Rodriguez G, et al. Amacrosonic system for industrial processing[J]. Journal of Ultrasonics, 2000, 38(8): 331-336.
- [4] Gallego-Juarez J, Rodr guez-corral G, Gaete Garre-ton L. An ultrasonic transducer for high power gas[J]. Journal of Ultrasonics, 1978(6): 267-271
- [5] 曹志远. 厚板动力学理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1983: 123-135.
CAO Zhiyuan. The plate dynamics theory and application[M]. Beijing: Science Press, 1983: 123-135.
- [6] 范家让. 强厚度叠层板壳的精确理论[M]. 北京: 科学出版社, 1998, 245-267.
FAN Jiarang. Accurate theory of thick laminated plates and shells[M]. Beijing: Science Press, 1998: 245-267.
- [7] 徐旭, 何福保. 厚板振动的三维弹性力学解[J]. 应用数学和力学, 1998, 19(7): 78-82.
XU Xu, HE fubao. Three dimensional elasticity solution for vibration problem of thick plate[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1998, 19(7): 78-82.
- [8] 贺西平, 宋旭霞, 李伟. 阶梯圆盘的设计及其声参数计算[J]. 声学学报, 2010, 35(5): 505-506.
HE Xiping, SONG Xuxia, LI Wei. Design and calculation of the parameters of stepped plate and sound[J]. Acustica Sinica, 2010, 35(5): 505-506.
- [9] 张频. 弯振圆盘和阶梯板的辐射阻抗及声场研究[D]. 西安: 陕西师范大学, 2007: 43-44.
ZHANG Pin. Study on radiation impedance and sound field of the flat and stepped circular plates in flexural vibration[D]. Xi'an: Shaanxi Normal University, 2007: 43-44.
- [10] 刘婷, 宋旭霞, 贺西平等. 阶梯圆盘复杂设计程序中参数初值的确定[J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2011, 12(6): 60-65.
LIU Ting, SONG Xuxia, HE Xiping, et al. Determination the initial values of the parameters of stepped plate complex in the design program[J]. Journal of Yunnan University: Natural Science Edition, 2011, 12(6): 60-65.
- [11] 兰正康, 贺西平, 马焕培, 等. 阶梯圆盘节圆偏离对辐射声场指向性的影响[J]. 振动与冲击, 2013, 17(12): 26-29.
LAN Zhengkang, HE Xiping, MA Huanpei, et al. The stepped plate pitch deviation from the point of impact on the sound radiation[J]. Journal of Vibration and Shock, 2013, 17(12): 26-29.
- [12] 贺西平, 宋旭霞, 李伟. 阶梯圆盘的设计及其声参数计算[J]. 声学学报, 2010, 35(5): 112-115.

- HE Xiping, SONG Xuxia, LI Wei, et al. Design and calculation of the parameters of stepped plate and sound[J]. *Acustica Sinica*, 2010, **35**(5): 112-115
- [13] 贺西平. 弯曲振动阶梯圆盘辐射阻抗的计算方法[J]. *物理学报*, 2010, **24**(05): 78-80.
- HE Xiping. Calculation of radiation impedance of the stepped circular plate[J]. *Journal of Physics*, 2010, **24**(5): 78-80.
- [14] 李家星, 贺西平, 刘豆豆. 多阶梯圆盘辐射阻抗的计算与分析[J]. *云南大学学报: 自然科学版*, 2014, **23**(4): 518-523.
- LI Jiaxing, HE Xiping, LIU Doudou. Calculation and analysis of the radiation impedance of the stepped circular plate[J]. *Journal of Yunnan University: Natural Science Edition*, 2014, **23**(4): 518-523.
- [15] 张频, 贺西平. 自由边界弯曲振动圆形薄板的辐射阻抗研究[J]. *声学技术*, 2006, **25**(4): 56-59.
- ZHANG Pin, HE xiping. Study on the radiation impedance of the bending vibration of circular thin plate with free boundary[J]. *Acoustic technology*, 2006, **25**(4): 56-59.
- [16] 赵凌波, 贺西平, 刘志永. 固定边界阶梯圆盘的设计及其振动特性计算[J]. *机械设计*, 2011, **18**(2): 78-81.
- ZHAO Lingbo, HE Xiping, LIU Zhiyong. Design and calculation of stepped plate under fixed boundary and its vibration characteristics[J]. *Mechanical Design*, 2011, **18**(2): 78-81.
- [17] 宁景锋, 贺西平, 李娜. 纵振激励频率对圆盘弯曲振动特性的影响[J]. *振动与冲击*, 2011, **30**(4): 65-69.
- NING Jingfeng, HE xiping, LI na. The longitudinal impact vibration. The excitation frequency on the flexural vibration characteristics of a circular plate[J]. *Vibration and Shock*, 2011, **30**(4): 65-69.
- [18] 朱林, 李继云, 赵洪兵. 弯曲振动圆盘振动特性试验研究[J]. *机械设计与制造*, 2010, **23**(3): 110-112.
- ZHU Lin, LI Jiyun, ZHAO Hongbing. Experimental study on vibration characteristics of flexural vibration disk[J]. *Mechanical Design and Manufacturing*, 2010, **23**(3): 110-112.
- [19] 潘晓娟, 贺西平. 厚圆盘弯曲振动的研究[J]. *物理学报*, 2010, **59**(11): 7911-7915.
- PAN Xiaojuan, HE xiping. Study on the thick disk bending vibration[J]. *Journal of Physics*, 2010, **59**(11): 7911-7915.
- [20] 刘志永, 贺西平, 周宏健. 厚圆盘基频振动声场指向性[J]. *云南大学学报: 自然科学版*, 2011, **33**(5): 569-572.
- LIU Zhiyong, HE Xiping, ZHOU Hongjian. The fundamental vibration of thick disk sound field[J]. *Journal of Yunnan University: Natural Science Edition*, 2011, **33**(5): 569-572.

火车轮轴相控阵超声波探伤机顺利通过铁路局技术评审

2016 年 9 月 24 日, 铁路局车辆处组织有关专家对中国科学院声学研究所(简称: 声学所)超声技术中心与江苏连云港九洲电控设备有限公司(简称: 九洲公司)联合开发研制的 HLB-T-I 型铁路货车轮轴相控阵超声波自动探伤机进行了现场技术评审。专家现场审查了研制报告, 听取了声学所课题组以及九洲公司技术代表的技术报告, 并考察观看了仪器现场演示。专家组认为仪器达到了铁路局的技术要求, 一致同意通过技术审查。

HLBT-I 型铁路货车轮轴相控阵超声波自动探伤仪, 由相控阵系统、机械控制系统、电气控制系统和数据处理软件组成; 实现了 A、B(S 型扫查)和 C 三种显示方式, 能够直观显示轮轴缺陷位置; 具有探头拼偏转角度大、扫查声程长的特点, 实现了轮轴和轮颈全覆盖检测; 具备数据存储、回放分析、设备自检和自动报警功能。

HLBT-I 型铁路货车轮轴相控阵超声波自动探伤机, 由声学所超声技术中心与江苏连云港九洲公司以产学研方式历时 4 年联合开发完成。该探伤机是目前国内首台全部自主研发的轮轴相控阵超声波探伤设备。此次评审的意义在于自主研发的相控阵设备, 可正式进入铁路检修市场。

《声学技术》编辑部