

# 一维复合波入射的固-固界面接触特性分析

仲晓敏, 韩庆邦, 蒋 睿, 黄建伟, 吴 宁

(河海大学物联网工程学院, 江苏常州 213022)

**摘要:** 基于弹性波理论, 针对接触面非线性相互作用, 建立了一个非线性刚度模型, 利用接触应力描述非线性刚度特性。引入包含基波和谐波的一维复合波入射, 在二阶微扰近似以及非线性边界条件下, 给出了界面的反射波和透射波的表达式, 得到反射系数和透射系数。结合界面线性刚度和接触应力的幂律关系, 定义了四个非线性系数。通过数值计算分析了固-固界面的非线性特性以及谐波对于接触应力的依赖性。

**关键词:** 非线性刚度; 边界条件; 非线性系数; 幂律关系

中图分类号: TB551

文献标识码: A

文章编号: 1000-3630(2019)-02-0158-06

DOI 编码: 10.16300/j.cnki.1000-3630.2019.02.008

## Analysis of the nonlinear stiffness characteristics of solid-solid contact interface based on one-dimensional composite wave incidence

ZHONG Xiao-min, HAN Qing-bang, JIANG Jian, HUANG Jian-wei, WU Ning

(College of Internet of Things, Hohai University, Changzhou 213022, Jiangsu, China)

**Abstract:** Based on the theory of the one-dimensional nonlinear interaction between elastic wave and contact surface, a nonlinear stiffness model using contact pressure to describe nonlinear stiffness characteristics is established. One-dimensional composite wave incidence including fundamental and harmonic waves is introduced, the expressions of reflection wave and transmission wave at the interface are derived by the second order perturbation approximation and under the nonlinear boundary condition, and the reflection and transmission coefficients are obtained. By the power-law relationship between the linear stiffness of interface and the contact pressure, four nonlinear parameters are defined. The nonlinear characteristics of solid-solid contact surface and the dependency of the harmonic waves on the contact pressure are analyzed by numerical calculation.

**Key words:** nonlinear stiffness; boundary condition; nonlinear parameters; power-law relationship

## 0 引言

近年来, 基于超声的非线性效应, 如谐波的产生、波束混叠以及谐振频率的改变而发展的非线性超声无损检测<sup>[1]</sup>和评价方法, 对于克服传统超声的不足具有积极的意义, 是对传统线性超声检测<sup>[2]</sup>手段的有效补充。国内外很多学者在这方面做了大量的研究, XIANG Y X 等<sup>[3]</sup>对非线性超声导波检测技术进行了研究, 王成会等<sup>[4]</sup>研究了超声波作用下气泡的非线性振动, SHUI Y 等<sup>[5]</sup>研究了固体板中的波的非线性传播。当波与接触界面相互作用时, 产生二阶及高阶谐波, 这就构成了一个相对较新的研究领域, 即接触声非线性<sup>[6-8]</sup>。与传统材料的非线性<sup>[9]</sup>相比, 接触声非线性会产生高次谐波, 能提供更有

价值的接触状态信息, 可用于检测部分闭合缺陷的材料<sup>[10]</sup>。

本文基于 BIWA S<sup>[11]</sup>研究的一维基频简谐波在固-固界面的传播特性以及 RICHARDSON<sup>[12]</sup>理论, 引入包含基波和谐波的复合入射波, 从界面刚度特性和其它声学参数出发, 建立一个一维的非线性接触刚度模型, 推导出反射波、透射波的表达式, 分析反射系数、透射系数和谐波的幅值比, 详细讨论了谐波传播时的接触刚度参数与接触应力之间的关系。

## 1 理论建模

### 1.1 理论模型

建立如图 1 所示的波传播模型, 一维弹性纵波沿  $x$  轴传播, 接触面的参考平面位置分别设置为  $x=X_-$ ,  $x=X_+$ , 参考平面之间的间隙距离为  $X_+-X_-$ 。假设在区域  $x<X_-$ ,  $x>X_+$  内两个线性弹性固体具有相同的属性(密度  $\rho$  和纵向刚度  $E$ ), 固-固界面有一定的粗糙度。在区域  $x<X_-$ , 入射一维纵波  $f^{\text{inc}}$ , 得

收稿日期: 2018-01-08; 修回日期: 2018-03-20

基金项目: 国家自然科学基金(11574072、11274091); 江苏重点研发计划(BE2016056)

作者简介: 仲晓敏(1994-), 女, 江苏南通人, 硕士研究生, 研究方向为通信与信息系统。

通讯作者: 韩庆邦, E-mail: hqb0092@163.com

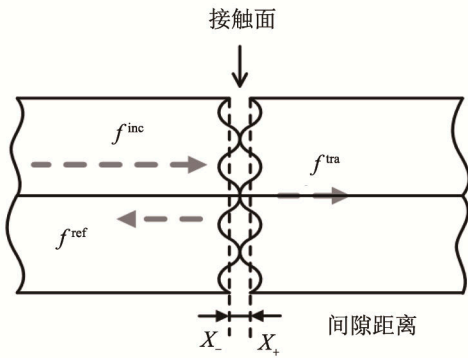


图 1 一维波通过接触面传播的示意图  
Fig.1 One-dimensional wave propagation through contact interface

到反射波  $f^{ref}$ ，在区域  $x > X_+$ ，得到透射波  $f^{tra}$ 。

在没有波入射的平衡状态下，设两个固体的接触静应力为  $\sigma_0$ ，间隙距离为  $h_0$ 。一维纵波沿  $x$  轴正向传播，运动方程以及应力位移关系为<sup>[11]</sup>

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (1)$$

$$\sigma + \sigma_0 = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2)$$

其中， $u(x, t)$  表示声波沿  $x$  方向传播的位移， $\sigma(x, t)$  表示应力变化， $t$  表示时间。方程(1)、(2)的解为

$$u(x, t) = f^{inc}(x-ct) + f^{ref}(x+ct), \quad x < X_- \quad (3)$$

$$u(x, t) = f^{tra}(x-ct), \quad x > X_+ \quad (4)$$

其中，函数  $f^{inc}(x-ct)$ 、 $f^{ref}(x+ct)$  及  $f^{tra}(x-ct)$  分别表示入射波、反射波和透射波，声波波速  $c = (\lambda/\rho)^{1/2}$ ， $\lambda$  为弹性常数。

当波与接触界面相互作用时，间隙距离随时间而变化，即：

$$h(t) = h_0 + u(X_+, t) - u(X_-, t) \quad (5)$$

应力满足：

$$\sigma(X_-, t) = \sigma(X_+, t) = -\sigma[h(t)] \quad (6)$$

$$\sigma(h_0) = \sigma_0 \quad (7)$$

即应力在界面上是连续的，并且服从于间隙距离  $h$  与接触应力  $\sigma(h)$  的非线性函数关系。

### 1.2 反射波与透射波

为求解上述方程，引入以下变量  $Z(t)$ 、 $Y(t)$ <sup>[12]</sup>：

$$Z(t) = [u(X_+, t) + u(X_-, t)]/2 \quad (8)$$

$$Y(t) = u(X_+, t) - u(X_-, t) = h(t) - h_0 \quad (9)$$

其中， $Z$  代表界面两端位移和的一半， $Y$  表示界面两端位移差，对式(8)、(9)求导并推导<sup>[12]</sup>得：

$$\dot{Z} = -cf^{inc}(X_- - ct) \quad (10)$$

$$\dot{Y} = 2cf^{inc}(X_- - ct) + \frac{2}{\rho c} [\sigma(h_0 + Y) - \sigma_0] \quad (11)$$

经一系列推导，透射波和反射波的表达式为

$$f^{tra}(x-ct) = f^{inc}(x-ct) + \frac{1}{2} Y [t - (x - X_+)/c] \quad (12)$$

$$f^{ref}(x+ct) = -\frac{1}{2} Y [t + (x - X_-)/c] \quad (13)$$

## 2 复合谐波入射特性分析

### 2.1 摄动分析

这里引入包含基波和二次谐波的复合波入射，表达式为

$$f^{inc}(x-ct) = A \cos\left[\frac{\omega}{c}(x - X_- - ct)\right] + B \cos\left[\frac{2\omega}{c}(x - X_- - ct)\right] \quad (14)$$

其中， $A$  和  $B$  表示为基波及谐波的振幅， $\omega$  为角频率。考虑到波的位移较小时，间隙距离改变也很小，利用泰勒展开：

$$\sigma(h) = \sigma(h_0 + Y) = \sigma_0 - K_1 Y + K_2 Y^2 \quad (15)$$

其中： $K_1$  表示线性刚度， $K_1 = -(d\sigma/dh)|_{h=h_0}$ ； $K_2$  表示接触面非线性刚度， $K_2 = \frac{1}{2} \frac{d^2\sigma}{dh^2}|_{h=h_0}$  (二阶刚度)。

将式(14)、(15)代入式(11)得关于  $Y$  的方程：

$$\dot{Y} + \frac{2K_1}{\rho c} Y - \frac{2K_2}{\rho c} Y^2 = 2A\omega \sin \omega t + 4B\omega \sin 2\omega t \quad (16)$$

考虑方程的近似解<sup>[13]</sup>  $Y = Y_1 + Y_2$ ， $Y_2$  是二阶微量，且  $Y_1$ 、 $Y_2$  满足以下方程：

$$\frac{dY_1}{dt} + \frac{2K_1}{\rho c} Y_1 = 2A\omega \sin \omega t + 4B\omega \sin 2\omega t \quad (17)$$

$$\frac{dY_2}{dt} + \frac{2K_1}{\rho c} Y_2 = \frac{2K_2}{\rho c} Y_1^2 \quad (18)$$

解得：

$$Y_1(t) = \frac{2A}{\sqrt{1+a^2/\omega^2}} \sin(\omega t - \delta_1) + \frac{2B}{\sqrt{1+a^2/(4\omega^2)}} \sin(2\omega t - \delta_2) \quad (19)$$

其中， $a = \frac{2K_1}{\rho c}$ ， $\delta_1 = \arctan(\omega/a)$ ， $\delta_2 = \arctan(2\omega/a)$ 。

$$Y_2(t) = \frac{2K_2 A^2}{K_1(1+a^2/\omega^2)} \left[1 - \frac{\sin(2\omega t - 2\delta_1 + \varphi_1)}{\sqrt{1+4\omega^2/a^2}}\right] + \frac{2K_2 B^2}{K_1[1+a^2/(4\omega^2)]} \left[1 - \frac{\sin(4\omega t - 2\delta_2 + \delta_3)}{\sqrt{1+16\omega^2/a^2}}\right] - D \sin(3\omega t + \delta_4) + E \sin(\omega t + \delta_5) \quad (20)$$

其中， $\delta_3 = \arctan[a/(4\omega)]$ ， $\varphi_1 = \arctan[a/(2\omega)]$ ， $\delta_4 = \theta_1 - \delta_1 - \delta_2$ ， $\delta_5 = \theta_2 + \delta_1 - \delta_2$ ， $\theta_1 = \arctan[a/(3\omega)]$ ， $\theta_2 = \arctan(a/\omega)$ ，系数  $D$ 、 $E$  见附录 I。

透射和反射波的表达式分别表示为

$$f^{\text{tra}}(x-ct) = f^{\text{inc}}(x-ct) + \frac{1}{2} Y[t - (x - X_+)/c] = \frac{K_2 A^2}{K_1(1+a^2/\omega^2)} + \frac{K_2 B^2}{K_1[1+a^2/(4\omega^2)]} + M \cdot \cos[\omega t - \frac{\omega}{c}(x - X_+) + \delta_5 - \Delta_1] +$$

$$N \cdot \sin[2\omega t - \frac{2\omega}{c}(x - X_+) - 2\delta_1 + \varphi_1 + \Delta_2] - \frac{2K_2 AB}{K_1 \sqrt{1+a^2/\omega^2} \sqrt{1+a^2/(4\omega^2)} \sqrt{1+9\omega^2/a^2}} \times \sin[3\omega t - \frac{3\omega}{c}(x - X_+) + \delta_4] -$$

$$\frac{K_2 B^2}{K_1[1+a^2/(4\omega^2)] \sqrt{1+16\omega^2/a^2}} \sin[4\omega t - \frac{4\omega}{c}(x - X_+) - 2\delta_2 + \delta_3] \quad (21)$$

$$f^{\text{ref}}(x+ct) = -\frac{1}{2} Y[t + (x - X_-)/c] = -\frac{K_2 A^2}{K_1(1+a^2/\omega^2)} - \frac{K_2 B^2}{K_1[1+a^2/(4\omega^2)]} + I \cdot \sin[\omega t + \frac{\omega}{c}(x - X_-) + \delta_5 + \Delta_3] +$$

$$L \cdot \sin[2\omega t + \frac{2\omega}{c}(x - X_-) - 2\delta_1 + \varphi_1 + \Delta_4] - \frac{2K_2 AB}{K_1 \sqrt{1+a^2/\omega^2} \sqrt{1+a^2/(4\omega^2)} \sqrt{1+9\omega^2/a^2}} \times$$

$$\sin[3\omega t + \frac{3\omega}{c}(x - X_-) + \delta_4] + \frac{K_2 B^2}{K_1[1+a^2/(4\omega^2)] \sqrt{1+16\omega^2/a^2}} \times \sin[4\omega t + \frac{4\omega}{c}(x - X_-) - 2\delta_2 + \delta_3] \quad (22)$$

其中,  $M$ 、 $N$  分别为透射波中一倍频分量、二倍频分量的振幅,  $I$ 、 $L$  分别为反射波中一倍频分量、二倍频分量的振幅, 表达式见附录 I, 相位  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$  见附录 I。

从式(20)和式(21)可以清楚地看到, 透射波和反射波都出现了角频率  $3\omega$ 、 $4\omega$ , 这是复合波在界面处由于非线性相互作用产生的高次谐波。

## 2.2 反射、透射系数与非线性特性

定义透射、反射波基频分量的绝对振幅与入射波振幅的比值, 分别为

$$R_1 = \frac{I}{A}, \quad R_2 = \frac{L}{B}, \quad T_1 = \frac{M}{A}, \quad T_2 = \frac{N}{B} \quad (23)$$

其中, 反射系数  $R_1$ 、 $R_2$  分别为一倍频和二倍频下, 反射波中振幅与入射波对应振幅之比, 透射系数  $T_1$ 、 $T_2$  定义同上,  $R$ 、 $T$  没有非线性效应。

为研究非线性效应, 定义非线性系数  $\beta_1$ 、 $\gamma_1$  是透射波及反射波中三次谐波分量振幅与基波分量振幅的比值,  $\beta_2$ 、 $\gamma_2$  是透射波及反射波中四次谐波与二倍频分量振幅的比值。经推导可得:

$$\beta_1 = \frac{2K_2 AB/M}{K_1 \sqrt{1+a^2/\omega^2} \sqrt{1+a^2/(4\omega^2)} \sqrt{1+9\omega^2/a^2}} \quad (24a)$$

$$\beta_2 = \frac{K_2 B^2/N}{K_1[1+a^2/(4\omega^2)] \sqrt{1+16\omega^2/a^2}} \quad (24b)$$

$$\gamma_1 = \frac{2K_2 AB/I}{K_1 \sqrt{1+a^2/\omega^2} \sqrt{1+a^2/(4\omega^2)} \sqrt{1+9\omega^2/a^2}} \quad (24c)$$

$$\gamma_2 = \frac{K_2 B^2/L}{K_1[1+a^2/(4\omega^2)] \sqrt{1+16\omega^2/a^2}} \quad (24d)$$

DRINKWATER 等<sup>[14]</sup>对各种粗糙表面进行建模, 采用超声波入射实验获得刚度  $K_1$  与接触应力  $\sigma_0$  平方根成比例的结论, 将粗糙表面拟合平滑表面, 即线性刚度与应力关系在界面上是连续的, 假定一个简单的应力与刚度的幂律关系, 其表达式为

$$K_1 = C\sigma_0^m \quad (25)$$

其中,  $C$  和  $m$  是正常数。将  $K_1 = -\frac{d\sigma}{dh}\bigg|_{h=h_0}$  和  $K_2 = \frac{1}{2} \frac{d^2\sigma}{dh^2}\bigg|_{h=h_0}$  与式(25)相结合, 给出二阶刚度与接触压力的函数, 即:

$$K_2 = \frac{1}{2} m C^2 \sigma_0^{2m-1} \quad (26)$$

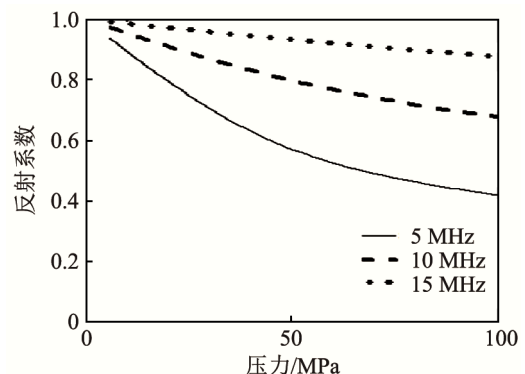
## 3 数值结果及分析

针对有限范围内的粗糙接触面, 传播介质为金属铝,  $\rho$  为  $2700 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , 速度  $c$  为  $6420 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , 对幂律函数进行计算分析, 选取常数  $C$  为  $6 \times 10^{10} \text{ Pa}^{-1/2}\text{m}^{-1}$ , 常数  $m$  为 0.5。分析相关系数时, 频率选取 5、10、15 MHz 三种情况, 入射波振幅选取 5 nm 和 20 nm 进行对比, 以上参数选自文献[11]。

图 2 为不同频率下反射系数与压力的关系图。从图 2(a)、2(b)中可以看出, 反射系数  $R_1$ 、 $R_2$  随着频率的增大而增大, 随接触压力的增大而减小。

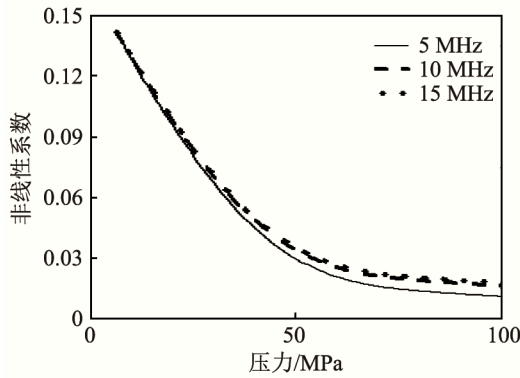
图 3 为不同频率下透射系数与压力的关系图。从图 3(a)、3(b)可以看出, 透射系数  $T_1$ 、 $T_2$  随着频率的增大而减小, 随接触压力的增大而增大。

下面选择不同的入射波振幅和基波频率分析非线性系数。选取入射波振幅分别为 5 nm 和 20 nm,

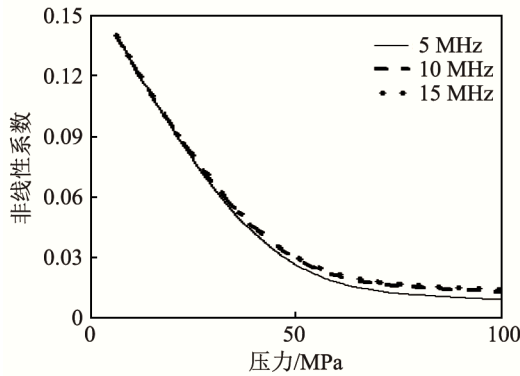


(a) 反射系数  $R_1$  与压力的关系图





(a) 非线性系数  $\beta_1$  与压力的关系图



(b) 非线性系数  $\beta_2$  与压力的关系图

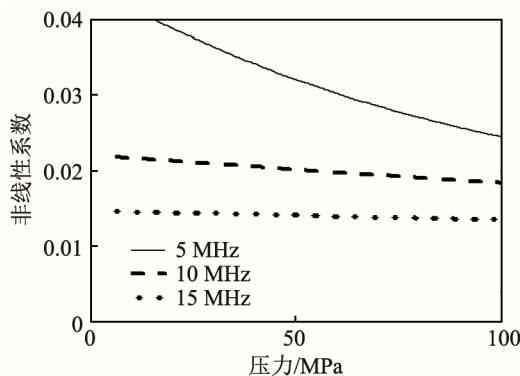
图 5 入射波振幅为 20 nm 时, 不同频率下透射波的非线性系数与接触压力的关系图

Fig.5 Relationship between nonlinear coefficients of transmission wave ( $\beta_1$  and  $\beta_2$ ) and contact pressure at different frequencies (the amplitude of incident wave is 20 nm)

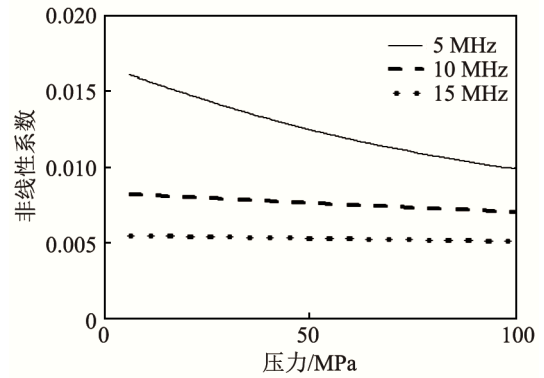
频率的增大而增大, 随接触压力增大而减小。

在入射波振幅为 20 nm 时, 入射频率分别为 5、10、15 MHz 时, 反射波的非线性系数与接触压力的关系如图 6 所示。从图 6 可以看出, 非线性系数  $\gamma_1, \gamma_2$  随频率增大而减小, 随接触压力增大而减小。

在入射波振幅为 20 nm, 入射频率为 5 MHz 时, 透射波与反射波中三次谐波与四次谐波非线性系数对比如图 7。从图 7 可以看出, 三次谐波比四次谐波的非线性系数更大, 即三次谐波的非线性效应更好。



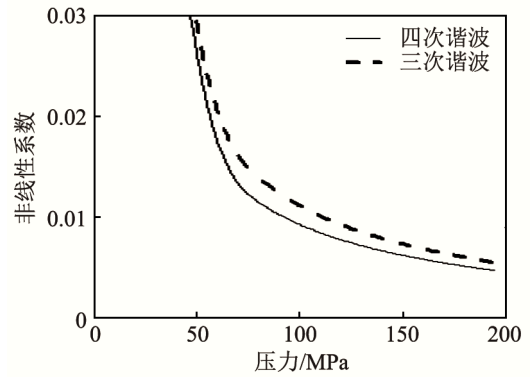
(a) 非线性系数  $\gamma_1$  与压力的关系图



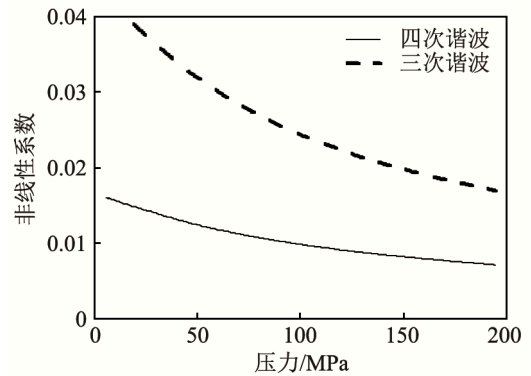
(b) 非线性系数  $\gamma_2$  与压力的关系图

图 6 入射波振幅为 20 nm 时, 不同频率下反射波的非线性系数与接触压力的关系图

Fig.6 Relationship between nonlinear coefficients of reflection wave ( $\gamma_1$  and  $\gamma_2$ ) and contact pressure at different frequencies (the amplitude of incident wave is 20 nm)



(a) 透射波中三次、四次谐波非线性系数的对比图



(b) 反射波中三次、四次谐波非线性系数的对比图

图 7 透射波和反射波中三次谐波与四次谐波非线性系数的对比图

Fig.7 Comparison between nonlinear coefficients of the third and fourth harmonics of transmission and reflection waves

### 4 结 论

本文基于固-固界面的线性刚度的幂律模型, 计算一维入射复合波的反射系数、透射系数以及非线性系数, 分析了接触压力和频率对它们的影响, 发现反射系数随频率的增大而增大, 随接触压力的增大而减小, 而透射系数规律则相反; 对比不同振幅

下的非线性系数,发现选取较大振幅时,非线性现象更显著。在透射波、反射波中,非线性系数随接触压力的增大而减小;透射波非线性系数随频率的增大而增大,但变化幅度不明显,在反射波中情况相反;在相同振幅、频率下,三次谐波的非线性效应优于四次谐波。综合考虑,反射波中三次谐波分量在检测微小裂缝中的优势最大。

### 参 考 文 献

- [1] 陆铭慧,徐肖霞.非线性超声检测方法及应用[J].无损检测,2012,34(7):61-66.  
LU Minghui, XU Xiaoxia. Review of nonlinear ultrasonic testing method[J]. Nondestructive Testing, 2012, 34(7): 61-66.
- [2] 吴怡.基于线性调频信号的超声检测技术研究[D].广州:华南理工大学,2012.  
WU Yi. Research on ultrasonic testing technology based on linear FM signal[D]. Guangzhou: South China University of Technology, 2012.
- [3] XIANG Y X, DENG M X. Cumulative second-harmonic generation of Lamb waves propagating in a two-layered solid plate[J]. Chinese Physics B, 2008, 17(11): 4232-4241.
- [4] 王成会,林书玉.超声波作用下气泡的非线性振动[J].力学学报,2010,42(6):1050-1059.  
WANG Chenghui, LIN Shuyu. The nonlinear oscillation of bubbles in the ultrasonic field[J]. Acta Mechanica Sinica, 2010, 42(6): 1050-1059.
- [5] SHUI Y, SOLODOV I Y. Nonlinear properties of Rayleigh and Stoneley waves in solids[J]. Journal of Applied Physics, 1988, 64(11): 6155-6165
- [6] 肖齐.固体粗糙界面与超声的非线性相互作用的研究[D].南京:南京大学,2014.  
XIAO Qi. Study the nonlinear interaction of solid rough interface with ultrasound[D]. Nanjing: Nanjing University, 2014.
- [7] LEN K S, SEVERIN F M, SOLODOV I Y. Experimental observation of the influence of contact nonlinearity on the reflection of bulk acoustic waves and the propagation of surface acoustic waves[J]. Sov. Phys. Acoust., 1991, 37(6): 610-612.
- [8] BREAZEALE M A, THOMPSON D O. Finite-amplitude ultrasonic waves in aluminum[J]. Appl. Phys. Lett., 1963, 3(1): 77-78.
- [9] THOMPSON R B, BUCK O, THOMPSON D O. Higher harmonics of finite amplitude ultrasonic waves in solids[J]. J. Acoust. Soc. Am., 1976, 59(5): 1087-1094.
- [10] HIRSEKORN S. Nonlinear transfer of ultrasound by adhesive joints—a theoretical description[J]. Ultrasonics, 2001, 39(1): 57-68.
- [11] BIWA S, NAKAJIMA S, OHNO N. On the acoustic nonlinearity of solid-solid contact with pressure-dependent interface stiffness[J]. Journal of Applied Mechanics, 2004, 71(4): 508.
- [12] RICHARDSON J M. Harmonic generation at an unbonded interface: i. planar interface between semi-infinite elastic media[J]. Int. J. Eng. Sci., 1979(17): 73-85.
- [13] LOMBARD B, PIRAUX J. Propagation of compressional elastic waves through a 1-D medium with contact nonlinearities[M]//Ultrasonic Wave Propagation in Non Homogeneous Media. Springer Berlin Heidelberg, 2009: 183.
- [14] DRINKWATER B W, DWYER-JOYCE R S, CAWLEY P. A study of the interaction between ultrasound and a partially contacting solid-solid interface[J]. Proc. R. Soc. London, Ser. A, 1996, 452(1995): 2613-2628.

### 附录 I

$Y_2$  的表达式中的系数:

$$D = \frac{4K_2AB}{K_1\sqrt{1+a^2/\omega^2}\sqrt{1+a^2/(4\omega^2)}\sqrt{1+9\omega^2/a^2}}$$

$$E = \frac{4K_2AB}{K_1\sqrt{1+a^2/\omega^2}\sqrt{1+a^2/(4\omega^2)}\sqrt{1+\omega^2/a^2}}$$

透射波表达式中的系数:

$$M = \frac{\sqrt{M_1+M_2}}{2\omega^2 K_1\sqrt{1+a^2/\omega^2}\sqrt{1+a^2/(4\omega^2)}\sqrt{1+\omega^2/a^2}}$$

$$M_1 = [4\omega^2 K_2AB + (a^2 + 2\omega^2)AK_1]^2$$

$$M_2 = A^2 a^2 \omega^2 K_1^2$$

$$N = \frac{\sqrt{N_1+N_2}}{K_1(1+a^2/\omega^2)\sqrt{1+4\omega^2/a^2}}$$

$$N_1 = 4K_1^2 a^2 B^2 / \omega^2, \quad N_2 = [K_1B(a^2 - \omega^2) / \omega^2 - K_2A^2]^2$$

反射波表达式中的系数:

$$I = \frac{\sqrt{I_1+I_2}}{2a\omega K_1\sqrt{1+a^2/\omega^2}\sqrt{1+a^2/(4\omega^2)}\sqrt{1+\omega^2/a^2}}$$

$$I_1 = A^2 K_1^2 (2\omega^2 + a^2)^2, \quad I_2 = a^2 \omega^2 (4K_2AB - AK_1)^2$$

$$L = \frac{\sqrt{L_1+L_2}}{K_1 a \omega (1+a^2/\omega^2)\sqrt{1+4\omega^2/a^2}}$$

$$L_1 = 4K_1^2 B^2 (a^2 - \omega^2)^2, \quad L_2 = \omega^2 a^2 (K_2 A^2 - 4BK_1)^2$$

透射波表达式中的相位:

$$A_1 = -\arctan \frac{AK_1(2\omega^2+a^2)+4K_2\omega^2B}{a\omega K_1}$$

$$A_2 = \arctan \frac{2BK_1a/\omega}{K_1B(a^2-\omega^2)/\omega^2-K_2A^2}$$

反射波表达式中的相位:

$$A_3 = -\arctan \frac{K_1(2\omega^2+a^2)}{a\omega(4K_2B-K_1)}$$

$$A_4 = \arctan \frac{2BK_1(a^2-\omega^2)}{(K_2A^2-4BK_1)a\omega}$$

### 附录 II

式(11)的推导如下:

根据参考文献[13],可知:

$$\sigma(X_+, t) = -\rho c \dot{O}_+ - \sigma_0 = -\sigma[h(t)] \quad (a)$$

$$\sigma(X_-, t) = \rho c \dot{O}_- - F - \sigma_0 = -\sigma[h(t)] \quad (b)$$

其中,  $F = -2\lambda f^{\text{inc}'}(X_- - ct)$ ,  $O_+ = u(X_+, t)$ ,  $O_- = u(X_-, t)$ 。

化简式(a)、(b)得:

$$\rho c \dot{O}_+ = -\sigma_0 + \sigma[h(t)] \quad (c)$$

$$\rho c \dot{O}_- = F + \sigma_0 - \sigma[h(t)] \quad (d)$$

由式(c)~(d)得:

$$\rho c (\dot{O}_+ - \dot{O}_-) = -F - 2\sigma_0 + 2\sigma[h(t)] \quad (e)$$

将  $F = -2\lambda f^{\text{inc}'}(X_- - ct)$ ,  $Y = O_+ - O_-$  代入式(e)得:

$$\rho c \dot{Y} = 2\lambda f^{\text{inc}'}(X_- - ct) + 2\{\sigma[h(t)] - \sigma_0\} \quad (f)$$

因为  $\lambda c^{-1} = (\lambda \rho)^{1/2} = \rho c$ , 代入式(f), 得式(11):

$$\dot{Y} = 2c f^{\text{inc}'}(X_- - ct) + \frac{2}{\rho c} [\sigma(h_0 + Y) - \sigma_0]$$