

基于拓展单位分解有限元法分析声波 在多域场内的响应

李鸿秋¹, 姜金辉², 陈国平², 智淑亚¹

(1. 金陵科技学院机电工程学院, 江苏南京 211169;

2. 南京航空航天大学结构力学和控制国家重点实验室, 江苏南京 210016)

摘要: 基于拓展单位分解有限元方法, 将平面波函数和贝塞尔函数作为基函数进行拓展。将亥姆霍兹方程离散, 求解时不变情况下多域场内声波的响应, 并分析基函数对求解精度的影响。将波动方程的时间导数利用二阶中心差分方法离散, 得到方程的隐式表达式, 划分时间步迭代求解时变情况下声波在多域场内的响应, 分析迭代时间间隔对计算精度的影响, 与典型算例的精确解进行比较, 验证精确性。结果表明, 平面波函数作为拓展基函数, 利用二阶中心差分法离散时间导数, 分析时不变以及时变情况下多域场内高波数声波的响应问题, 具有较高的计算精度和计算效率。

关键词: 波动方程; 亥姆霍兹方程; 单位分解有限元; 拓展方法; 时变和时不变

中图分类号: O429

文献标识码: A

文章编号: 1000-3630(2019)-05-0481-07

DOI 编码: 10.16300/j.cnki.1000-3630.2019.05.001

Analysis of acoustic wave response in complex multiple domains based on the enriched partition of unit finite element method

LI Hong-qiu¹, JIANG Jin-hui², CHEN Guo-ping², ZHI Shu-ya¹

(1. College of Mechanical and Electrical Engineering, Jinling Institute of Technology, Nanjing 211169, Jiangsu, China; 2. State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, Jiangsu, China)

Abstract: Based on the enriched partition of unity finite element method, the plane wave functions or Bessel functions are enriched as basis functions to discretize Helmholtz equation, the response of acoustic wave in complex multiple domains under time-independent condition is solved and the effect of basis functions on solution accuracy is analyzed. The two-order central difference method is used to discrete time derivative of the wave equation for implicit solution and the time step iterative method is used to solve the response of acoustic wave in complex multiple domains under time-dependent condition. By taking the plane wave function enriched as basis function and using the two-order central difference method to discrete time derivative, the responses of high wavenumber acoustic waves in complex multiple domains under time-dependent and time-independent conditions are calculated. Also, the effect of iterative time interval on calculation accuracy is analyzed. Typical examples are used to compare the calculation results with the exact solutions and to verify the method in this paper having high accuracy and efficiency.

Key words: wave equation; Helmholtz equation; partition of unity finite element; enriched method; time-dependent and time-independent

0 引 言

研究声波的问题归根结底是求解不同边界条件下的波动方程, 数值解法大多基于有限元方法^[1-2]、有限差分法^[3-4]和边界元方法^[5-6]。当声波的响应问题

涉及到复杂区域, 多域场以及高波数等情况时, 上述方法就会面临计算量过大或者求解效率较低的问题^[7]。尤其对于高波数问题, BUBASKA 等^[8]的研究表明, 即使布置足够多的节点, 由于存在污染误差(pollution error), 精度也很难得到保证。近年来, 研究者们又发展了谱有限元、边界元方法以及无网格方法计算声波的传播和响应问题^[9-11], 但是对于高波数和多域或者复杂域等情况, 计算效率和计算精度依然不甚理想。

单位分解有限元方法(Partition of Unity Finite Element Method, PUFEM)能够在现有网格基础上通过附加函数提高计算效率。LAGHROUCHE 等^[12]

收稿日期: 2018-05-03; 修回日期: 2018-06-18

基金项目: 江苏省自然科学基金资助(BK20151099); 金陵科技学院科研基金资助(JIT-B-201219); 江苏省高校优秀中青年骨干教师和校长境外研修计划资助

作者简介: 李鸿秋(1973—), 女, 河北邯郸人, 博士研究生, 副教授, 研究方向为振动与噪声控制。

通讯作者: 李鸿秋, E-mail: lihongqiu@jit.edu.cn

的研究表明, PUFEM 求解高波数问题时不必细化有限元网格, SHAID 等^[13]利用高斯函数作为拓展基函数探讨了热场中热的传播问题, 并将此方法应用到瞬态热的求解即时域问题。LUOSTARI 等^[14]应用极弱变分方法, TEZAUR 等^[15]应用非连续拓展方法以及 MONK 等^[16]利用最小二乘法将单位分解方法应用于边界元方法求解声波和弹性波问题。MOHAMED 等^[17]分析了上述几种方法的求解局限性和计算效率问题, 同时利用平面波作为拓展基函数用于求解不同边界条件下的波动方程, 包括多个散射源的问题, 取得了不错的计算精度和计算效率。同时, 也有其他拓展有限单元方法^[18]用于求解波的传播问题, 但这些研究往往局限于时间谐波, 分析时不变情况下的声波的传播和响应问题。

本文利用四边形等参单元的形函数, 采用平面波函数或者贝塞尔函数作为基函数, 经拓展建立单位分解有限元的整体形函数。构造求解亥姆霍兹方程整体刚度矩阵。将波动方程的时间导数利用二阶中心差分方法离散, 得到波动方程的隐式表达式, 求解时变情况下声波在多域场内的响应。

1 声波的响应

1.1 波动方程

声波的传播过程可以描述成波动方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \phi = f(\hat{\mathbf{x}}, t); & (t, \hat{\mathbf{x}}) \in [0, T] \times \Omega \\ \nabla \phi \cdot \mathbf{n}(\hat{\mathbf{x}}) + h\phi = g(\hat{\mathbf{x}}, t); & (t, \hat{\mathbf{x}}) \in [0, T] \times \Gamma \end{cases} \quad (1)$$

式(1)中, 求解区域为 Ω , 边界用 Γ 表示, $\mathbf{n}(\hat{\mathbf{x}})$ 表示 Γ 的外法线方向, $\hat{\mathbf{x}}$ 表示空间某一点的位置坐标 $\hat{\mathbf{x}} = (x, y)^T$, ∇ 表示拉普拉斯算子, $f(\hat{\mathbf{x}}, t)$ 和 $g(\hat{\mathbf{x}}, t)$ 表示激励源函数, 此处给出的是 Robin 边界条件, 但是如果将系数 h 作为惩罚因子, 增大系数 h 则可以得到狄利克雷(Dirichlet)边界条件。

1.2 亥姆霍兹方程

波的传播问题都可以归结为在给定的边界条件和初始条件下求波动方程的解。用分离变量的方法求解波动方程, 则可以得到不考虑时间问题的亥姆霍兹方程(2), 以及边界条件式(3)。

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = 0, \quad \text{区域 } \Omega \text{ 内} \quad (2)$$

$$\nabla \Phi \cdot \mathbf{n}(\hat{\mathbf{x}}) + ik\Phi = g, \quad \text{在边界 } \Gamma \text{ 上} \quad (3)$$

式(2)、(3)中, Φ 表示域 Ω 内的声压, k 表示波数。因此, 可以将波动方程看作时变情况下的声波的响应问题, 将亥姆霍兹方程看作时不变情况下声波的响应问题。

2 拓展单位分解有限元法

拓展单位有限元法的核心思想是由单位分解函数和基函数共同逼近求解空间, 基函数不依赖有限元网格, 不增加网格, 可以通过拓展基函数的阶次提高计算效率和计算精度^[19]。基函数的拓展方式可以是均匀的, 也可以是不均匀的, 不同的基函数有不同的计算精度^[20]。

2.1 拓展基函数

传统有限元方法是将求解域划分为由 n 个节点构成的单元, 单元内的未知势函数 ϕ 利用多项式形函数和节点上的值相乘得到, 即: $\phi = \sum_{i=1}^n N_i \phi_i$ 。拓展有限元方法的原理则是用一组(m 个)基函数拓展 ϕ_i , 将 ϕ_i 表示为

$$\phi_i = \sum_{j=1}^m \psi_j(x, y) A_i^j \quad (4)$$

从而得到:

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_i(x, y) \psi_j(x, y) A_i^j \quad (5)$$

将基函数和有限元形函数的乘积看作一个整体, 形成新的形函数即:

$$N_{\text{ext}}^e = [N_1 \psi_1, N_1 \psi_2, \dots, N_1 \psi_m, N_2 \psi_1, \dots, N_n \psi_m] \quad (6)$$

2.2 误差分析

本文采用四边形的等参单元作为单位分解单元, 分别利用平面波函数和贝塞尔函数作为基函数拓展。为较好评价本文给出的拓展单位分解有限元方法的计算精度, 选择特殊算例, 对比精确解, 并采用 L_2 作为误差分析尺度, 本文中 ε_{L_2} 以 L_2 作为误差分析尺度得到的相对误差为:

$$\varepsilon_{L_2} = \sqrt{\frac{\iint_{\Omega^e} (\phi - \phi^h)^2}{\iint_{\Omega^e} (\phi)^2}} \quad (7)$$

其中: ϕ 为数值解, ϕ^h 为精确解, Ω 为求解域。

3 时不变情况下声波在多域场的响应分析

3.1 构造给定边界条件亥姆霍兹方程的积分弱形式

图 1(a)代表平面声波 $u = e^{ikx}$ 入射, 域内包含圆形空腔, 传播区间无界, 满足索末菲(Sommerfeld)边界条件 $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0$ 。为避免截断边界影响求解结果, 外边界的边界条件需满足洛平(Robin)边界

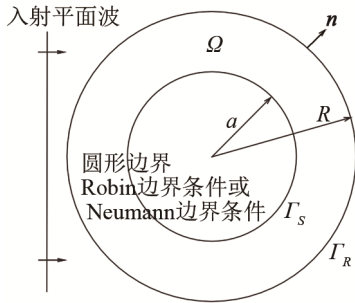
条件式(8a), 图 1(b)代表平面声波经圆形边界反射后在多域场内的传播, 圆形边界处为诺依曼(Neumann)边界(8b):

$$\partial_n \phi = -ikA_n \phi, \text{ 在 } \Gamma_R (\text{Robin边界}) \text{ 上} \quad (8a)$$

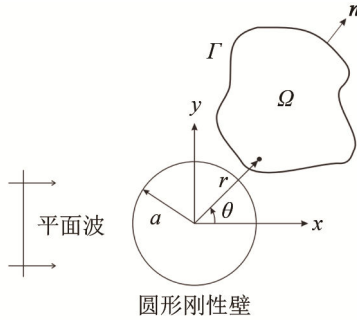
$$\nabla \phi \cdot n = -ikv_n, \text{ 在 } \Gamma_N (\text{Neumann边界}) \text{ 上} \quad (8b)$$

式中, A_n 为权系数, v_n 为边界位置的速度。首先讨论图 1(a)的情况, 考虑到截断边界而不影响波的传播, 令 $A_n=1$, 式(8a)写成:

$$\nabla \phi \cdot n + ik\phi = g, \quad g \in \Gamma \quad (9)$$



(a) 平面波入射内含圆形边界(Robin 边界或 Neumann 边界)的求解区域



(b) 平面波入射经圆形边界(Neumann 边界)反射后的求解区域
图 1 求解区域及求解边界示意图

Fig.1 Schematic diagram of the solving models

平面声波入射, $g = \nabla \phi^{\text{ex}} \cdot n + ik\phi^{\text{ex}}$, 用权重系数 w 分别去乘亥姆霍兹方程(2)和边界条件式(3)的左右两端, 得到:

$$\int_{\Omega} w(\nabla^2 \phi + k^2 \phi) d\Omega = 0, \quad \forall w \quad (10)$$

$$\oint_{\Gamma} w(\nabla \phi \cdot n + ik\phi) d\Gamma = \oint_{\Gamma} (wg) d\Gamma, \quad \forall w \quad (11)$$

对式(10)应用格林公式得到:

$$\int_{\Omega} (-\nabla w \nabla \phi + k^2 w \phi) d\Omega + \oint_{\Gamma} w(\nabla \phi \cdot n) d\Gamma = 0, \quad \forall w \quad (12)$$

将式(11)代入式(12), 得到积分弱形式(13):

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \phi d\Omega - k^2 \int_{\Omega} w \phi d\Omega + ik \oint_{\Gamma} w \phi d\Gamma = \oint_{\Gamma} w g d\Gamma \quad (13)$$

3.2 构造拓展单位分解有限元的整体形函数

采用四边形等参元作为单位分解单元, 划分单

元 T_q (q 表示单元序号), 求解域为 $\Omega_q = \bigcup_q T_q$, 用平面波函数作为基函数在单位分解单元的节点处进行拓展, 拓展个数为 m 个, 均匀分布, 因此, $\Psi_j(x, y) = e^{ik(x \cos(\theta_j) + y \sin(\theta_j))}$, 其中, $\theta_j = 2\pi(j-1)/m$ 。则拓展单位分解有限元的整体形函数可以写成:

$$N_{\text{ext}}^e = [N_1 \Psi_1, N_1 \Psi_2, \dots, N_1 \Psi_m, N_2 \Psi_1, \dots, N_4 \Psi_m] \quad (14)$$

局部节点响应值为: $d^e = [A_1^e, A_2^e, \dots, A_m^e, A_1^e, \dots, A_m^e]^T$, 则单元内其它点响应值可用式(15)求得:

$$\phi^e(x, y) = N_{\text{ext}}^e d^e \quad (15)$$

3.3 构造时不变情况下拓展单位分解有限元法的刚度矩阵和求解式

设有转换矩阵 L^e , 使 $d^e = L^e \cdot d$, 将各单元自由度按对号入座的方式扩展到整体自由度矩阵, 可得下式:

$$\nabla \phi^e(x, y) = B^e(x, y) \cdot L^e \cdot d \quad (16)$$

将式(15)和(16)代入亥姆霍兹方程积分弱形式(13), 得到矩阵形式(17):

$$w^T \sum_{e=1}^{Ne} (L^e)^T \left[\underbrace{\int_{\Omega^e} N^{eT} \cdot N^e d\Omega}_{K_m^e} + \underbrace{\int_{\Omega^e} B^{eT} \cdot B^e d\Omega}_{K_s^e} + \underbrace{ik \int_{\Gamma} N^{eT} \cdot N^e d\Gamma}_{K_g^e} \right] L^e d = w^T \sum_{e=1}^{Ne} (L^e)^T \left[\underbrace{\int_{\Gamma} N^{eT} \cdot g d\Gamma}_{f_g^e} \right] \forall w^T \quad (17)$$

显然 $\forall w^T$, 刚度矩阵为 $k^e = k_m^e + k_s^e + k_g^e$ 。利用式(17)求 d 。

3.4 数值算例

算例 1

如图 1(a)所示, 入射平面声波为 $u = e^{ikx}$, 入射角度为 α , 振幅为单位幅值, 求解域为半径为 1 的圆形区域, 其中心位于(1, 1), 域内包含两个半径分别为 0.5、圆心位置(0.5, 1.2)和半径为 0.25、圆心位置(1.5, 0.5)的圆。入射角度分别为 $\alpha=0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$, 波数分别为 $k=5\pi, 8\pi, 15\pi, 20\pi$ 。模型的单元个数为 60。利用高阶 Gauss-Legendre 积分方法对式(15)积分。图 2~5 给出了其中 4 种情况下的声响应值, 表 1 给出了部分计算结果的误差。

算例 2

如图 1(a)所示, 入射平面波 $u = e^{ikx}$ 经由满足 Neumann 边界条件(8b)的圆形表面反射后的响应问题, 外截断边界满足 Robin 边界条件式(8a)。本例中^[21], $g = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n \frac{J_n'(ka)}{H_n'(ka)} H_n(kr) e^{in\theta}$, 其中 r, θ 分别表示所在位置的极坐标, H_n, J_n 分别表示 n 阶汉克尔函数和贝塞尔函数, H_n', J_n' 是其对应的微分形式。此算例精确解包含贝塞尔函数, 可以采用贝塞尔函数作为基函数, 即令 $\Psi_j(x, y) = J_j(kr) e^{ij\theta}$ 。算例 2

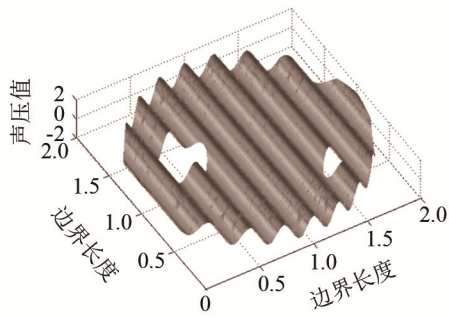


图 2 声波响应势能值的实部($k=8\pi, \alpha=0^\circ$)
Fig.2 The real part of the potential energy of acoustic wave response($k=8\pi, \alpha=0^\circ$)

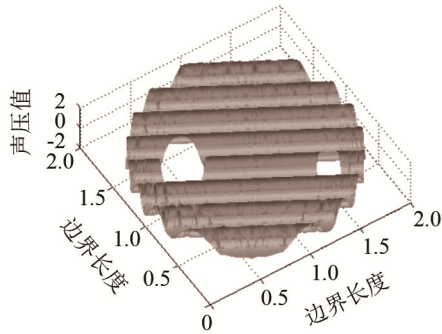


图 3 声波响应势能值的实部($k=8\pi, \alpha=60^\circ$)
Fig.3 The real part of the potential energy of acoustic wave response($k=8\pi, \alpha=60^\circ$)

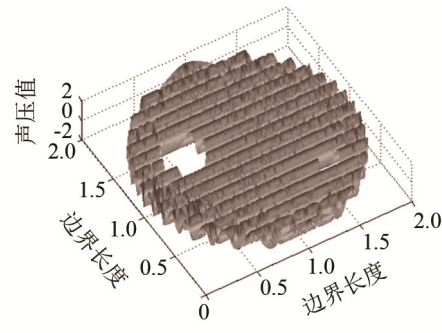


图 4 声波响应势能值的实部($k=15\pi, \alpha=90^\circ$)
Fig.4 The real part of the potential energy of acoustic wave response($k=15\pi, \alpha=90^\circ$)

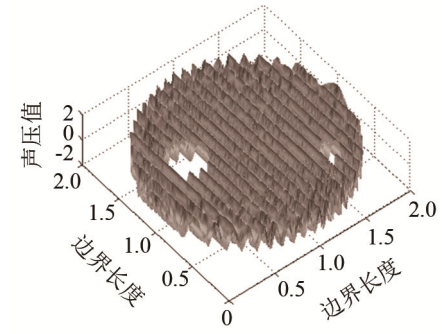


图 5 声波响应势能值的实部($k=20\pi, \alpha=0^\circ$)
Fig.5 The real part of the potential energy of acoustic wave response($k=20\pi, \alpha=0^\circ$)

分别采用平面波函数和贝塞尔函数作为基函数, 拓展个数均为 8 个, 计算当入射角度分别为 $\alpha=0^\circ$ 、 60° 、 90° , 波数分别为 $k=5\pi$ 、 15π 、 20π , 振幅为单位幅值时的声响应值。结果表明, 使用平面波函数作为基函数拓展, 计算结果优于使用贝塞尔函数作为基函数拓展的情况(见表 2), $\varepsilon_{12}(a)$ 为基函数为平面波函数时的误差值, $\varepsilon_{12}(b)$ 为基函数为贝塞尔函数时的误差值。图 6~9 所示为采用平面波函数为基函数求解得到的声波响应数值。

表 1 不同波数和入射角情况下的相对误差(算例 1)
Table 1 The relative errors for different wave numbers and different incident angles (Example 1)

k	$\alpha/(^\circ)$	$\varepsilon_{12}/\%$
5π	0	2.2570×10^{-4}
5π	60	4.1592×10^{-4}
8π	60	2.40×10^{-2}
10π	90	1.89×10^{-2}
15π	0	1.5956×10^{-5}
15π	90	1.1530×10^{-5}

表 1 和表 2 的误差结果表明, 虽然单元网格划分较少, 即使单元尺寸已经远远超过了波长, 依然能获得较高的计算精度。且当内边界为 Neumann 边界条件时, 精确解包含贝塞尔函数情况下, 采用

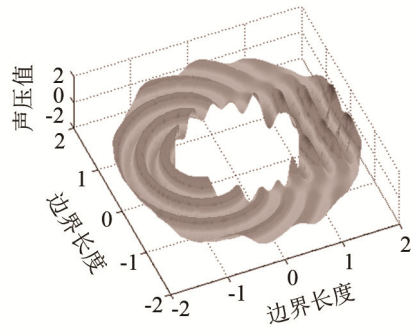


图 6 声波响应势能值的实部($k=5\pi, \alpha=0^\circ$)
Fig.6 The real part of the potential energy of acoustic wave response($k=5\pi, \alpha=0^\circ$)

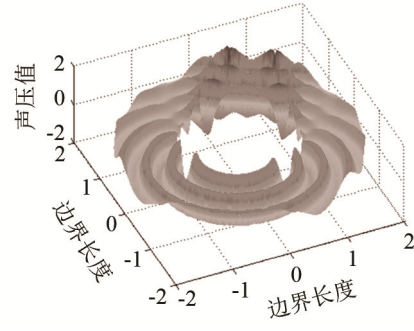


图 7 声波响应势能值的实部($k=5\pi, \alpha=60^\circ$)
Fig.7 The real part of the potential energy of acoustic wave response($k=5\pi, \alpha=60^\circ$)

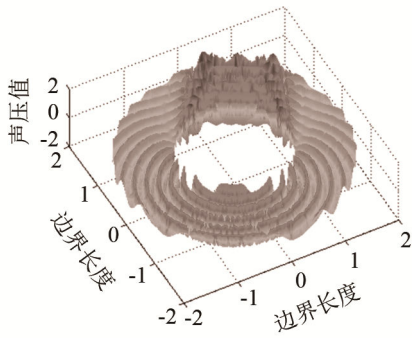


图8 声波响应势能值的实部($k=10\pi$, $\alpha=60^\circ$)
Fig.8 The real part of the potential energy of acoustic wave response($k=10\pi$, $\alpha=60^\circ$)

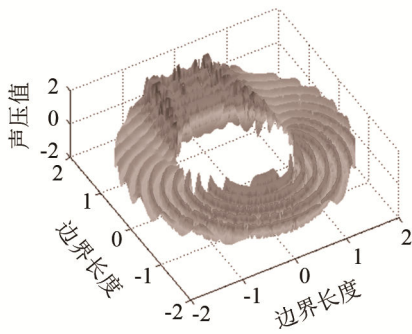


图9 声波响应势能值的实部($k=10\pi$, $\alpha=90^\circ$)
Fig.9 The real part of the potential energy of acoustic wave response($k=10\pi$, $\alpha=90^\circ$)

平面波函数作为基函数拓展, 同样具有较高的计算精度。

表2 不同波数和入射角情况下的相对误差(算例2)
Table 2 The relative errors for different wave numbers and different incident angles (Example 2)

k	$\alpha/(^\circ)$	$\varepsilon_{L2}(a)/\%$	$\varepsilon_{L2}(b)/\%$
5π	0	2.2570×10^{-2}	2.67
5π	60	4.1592×10^{-2}	4.34
10π	90	1.89	6.54
10π	60	2.71	5.74

4 时变情况下声波在多域场的响应分析

4.1 构造给定边界条件亥姆霍兹方程的积分弱形式

设声波在空间传播的时间为 $[0, T]$, 域内的波动方程和边界条件可以写成式(1)的形式。则其初始状态为

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t}(0, x) = V_0(x), & x \in \Omega \\ \phi(0, x) = \phi_0(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (18)$$

时间步长为 $\Delta t = t_{n+1} - t_n (n=0, 1, 2, \dots)$, ϕ_n 表示在时

间步 t_n 时的声响应值。使用隐式方法可以避免显式方法中需要的小时间步长, 本文采用二阶中心差分法离散时间导数, 迭代公式写成式(19)的形式:

$$\begin{cases} \frac{\phi_{n+1} - 2\phi_n + \phi_{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \nabla^2 \phi_{n+1} = f(x, t_{n+1}), & n=0, 1, 2, \dots \\ \phi(0, x) = \phi_0(x) \\ \phi_{(-1)}(x) = \phi_0(x) - \Delta t V_0(x) \end{cases} \quad (19)$$

同样, ϕ_{n+1} 是在时间步 t_{n+1} 时的响应值。显然, ϕ_{n+1} 受时间步长和网格划分的影响。同样用权函数 w 去乘式(19)的两端, 并在空间 Ω 和边界 Γ 上积分, 利用散度定理和边界条件(8a), 得到此类边界条件下波动方程的积分弱形式:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w \phi_{n+1} d\Omega + (c^2 \Delta t^2) \int_{\Omega} \nabla w \nabla \phi_{n+1} d\Omega + (c^2 \Delta t^2) (ik) \int_{\Gamma} w \phi_{n+1} d\Gamma = \int_{\Omega} w (2\phi_n - \phi_{n-1} + \Delta t^2 f(x, t_{n+1})) d\Omega + \\ (c^2 \Delta t^2) \int_{\Gamma} w g(x, t_{n+1}) d\Gamma \end{aligned} \quad (20)$$

4.2 构造时变情况下拓展单位分解有限元法的刚度矩阵和求解式

在求解域划分单元 T_i , 求解域表示为 $\Omega_h = \bigcup_i T_i$, 采用平面波函数作为基函数, 拓展个数为 m 。同样将式(16)、(17)代入波动方程的积分弱形式(20), 可以得到矩阵求解式:

$$\begin{aligned} W^T \sum_{e=1}^{N_e} (L_{n+1}^e)^T \left[\underbrace{\int_{\Omega^e} N^{eT} \cdot N^e d\Omega}_{K_m^e} + c^2 \Delta t^2 \underbrace{\int_{\Omega^e} e \cdot B^e d\Omega}_{K_k^e} + \right. \\ \left. \underbrace{(c^2 \Delta t^2) (ik) \int_{\Gamma} N^{eT} \cdot N^e d\Gamma}_{K_n^e} \right] (L_{n+1}^e)^e d = \\ W^T \sum_{e=1}^{N_e} (L_{n+1}^e)^T \left[\underbrace{\int_{\Omega} N^{eT} \cdot F_{n+1} d\Omega}_{f_f^e} + \right. \\ \left. \underbrace{(c^2 \Delta t^2) \int_{\Gamma} N^{eT} \cdot g_{n+1} d\Gamma}_{f_g^e} \right] (L_{n+1}^e)^e d \end{aligned} \quad (21)$$

式中, $F_{n+1} = 2\phi_n - \phi_{n-1} + \Delta t^2 f(x, t_{n+1})$ 。显然, 如果能够得到在时间步 t_{n-1} 、 t_n 时的声响应值 ϕ_{n-1} 和 ϕ_n , 则可以获得在时间步 t_{n+1} 时的声响应值 ϕ_{n+1} 。

4.3 数值算例

算例3

如图1(a)所示, 平面波 $u = e^{ikx}$ 入射, 本算例的求解区域为凹字形状的不规则区域, 初始条件为: $\phi_0 = e^{ikr}$, $V_0 = e^{ikr}(-i\omega)$ 。时变问题解包含时间, 其精确解为 $\phi(x, y, t) = e^{i\omega t} \cdot e^{ik(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))}$, 分别计算 $k=5\pi$ 、 10π , $\alpha=0^\circ$ 、 60° 情况下在时间 $[0, T]$ 的声响应值。图10、11分别给出了在 T 时刻的部分结果, 相对误差见表3。

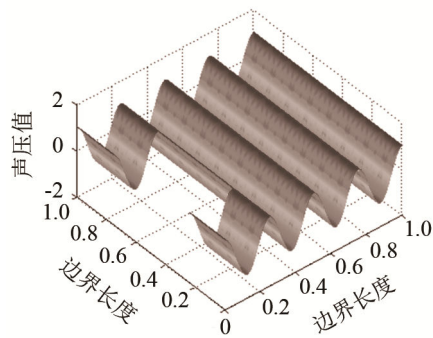


图 10 声波响应势能值的实部($k=5\pi, \alpha=0^\circ, T=0.01\text{ s}$)
Fig.10 The real part of the potential energy of acoustic wave response ($k=5\pi, \alpha=0^\circ, T=0.01\text{ s}$)

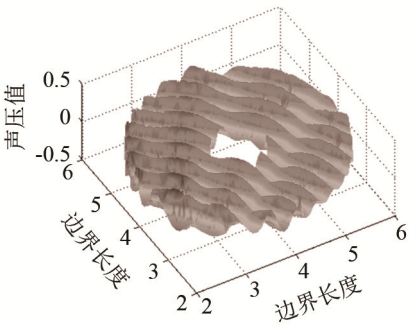


图 12 声波响应势能值的实部($k=5\pi, \alpha=0^\circ, T=0.01\text{ s}$)
Fig.12 The real part of the potential energy of acoustic wave response ($k=5\pi, \alpha=0^\circ, T=0.01\text{ s}$)

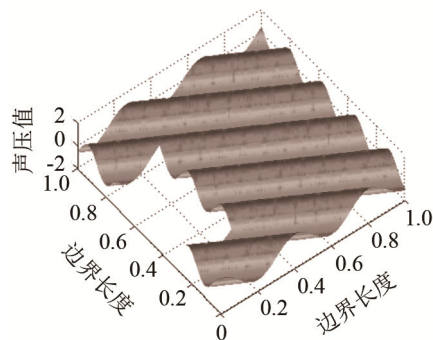


图 11 声波响应势能值的实部($k=5\pi, \alpha=60^\circ, T=0.005\text{ s}$)
Fig.11 The real part of the potential energy of acoustic wave response ($k=5\pi, \alpha=60^\circ, T=0.005\text{ s}$)

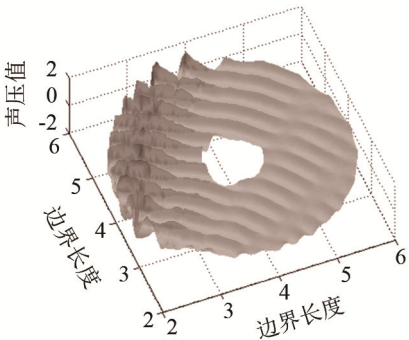


图 13 声波响应势能值的实部($k=6\pi, \alpha=60^\circ, T=0.03\text{ s}$)
Fig.13 The real part of the potential energy of acoustic wave response ($k=6\pi, \alpha=60^\circ, T=0.03\text{ s}$)

表 3 不同波数,入射角和不同时间步情况下的相对误差(算例 3)
Table 3 The relative errors for different wavenumbers, different incident angles and different time steps (Example 3)

k	$\alpha/(^\circ)$	T/s	$\varepsilon_{L2}/\%$
5π	0	0.001	0.001 5
5π	0	0.002	0.000 2
10π	60	0.001	0.005 6
10π	60	0.005	0.004 7

算例 4

平面波 $u=e^{ikx}$ 入射, 被圆心为(0, 0)、半径为 1 的圆形刚性壁反射后的响应, 令求解区域是圆心为(4,4)、半径分别为 $r_1=0.5, r_2=2$ 的多域空间。初始条件为: $\Phi_0=e^{ikr}; V_0=e^{ikr}(-i\omega)$ 。精确解包含时间项:

$$\phi(r, \theta, t) = -e^{i\omega t} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n \frac{J_n'(ka)}{H_n'(ka)} H_n(kr) e^{in\theta} \right]。$$

分别计算 $k=5\pi, 6\pi, \alpha=0^\circ, 60^\circ$ 情况下的时变响应值, 部分结果图见图 12 和图 13 所示, 相对误差见表 4。算例 3 和算例 4 的结果显示, 利用二阶差分离散时间导数构造整体计算矩阵, 基于拓展单位分解有限元法计算时变情况下声波在多域场的响应问题, 计算结果精度较高, 且当时间步长 Δt 满足

表 4 不同波数,入射角和不同时间步情况下的相对误差(算例 4)
Table 4 The relative errors for different wavenumbers, different incident angles and different time steps (Example 4)

k	$\alpha/(^\circ)$	T/s	$\varepsilon_{L2}/\%$
5π	0	0.000 1	0.050 3
5π	0	0.000 2	0.048 2
6π	60	0.000 1	0.136 2
6π	60	0.000 3	0.0125 1

小于 1.0×10^{-3} 的情况下, 如果继续降低时间步长, 计算精度变化不大。

5 结 论

基于拓展单位分解有限元方法求解高波数声波在多域场内的响应, 分别利用平面波函数, 贝塞尔函数作为基函数进行拓展, 分析时不变情况下声波在多域场内的响应问题。利用二阶中心差分法离散时间导数, 同样基于单位分解有限元法构造波动方程的积分弱形式, 用于求解时变情况下声波在多域场内的响应问题, 计算结果表明: 本文构造的拓展基函数用于波动方程和亥姆霍兹方程的求解计算效率和计算精度较高, 并且适用于不规则、多域、

复杂区域以及高波数情况下声波响应的求解, 此方法对网格的划分数要求较低, 即使网格数量较少, 甚至波长大于单元长度依然可以取得较高的计算精度, 不增加单位个数通过增加拓展基个数也可以提高计算精度。

参 考 文 献

- [1] KOHNO H, BATHE K J, WRIGHT J C. A finite element procedure for multiscale wave equations with application to plasma waves[J]. *Computers & Structures*, 2010, **88**(1-2): 87-94.
- [2] HARARI I. A survey of finite element methods for time-harmonic acoustics[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, **195**(13): 1594-1607.
- [3] PERREY-DEBAIN E, TREVELYAN J, BETTESS P. Wave boundary elements: a theoretical overview presenting applications in scattering of short waves[J]. *Engineering Analysis with Boundary Element*, 2004, **28**(2): 131-141.
- [4] HUTTUNEN T, MONK P. The use of plane waves to approximate wave propagation in anisotropic media[J]. *Mathematics of Computation*, 2007, **204**: 350-367.
- [5] BUFFA A, HIPTMAIR R, SCHWAB C. Boundary element methods for Maxwell transmission problems in Lipschitz domains[J]. *Numerical Mathematics*, 2003, **95**(3): 459-485.
- [6] PERREY-DEBAIN E, TREVELYAN J, BETTESS P. Wave boundary elements: a theoretical overview presenting applications in scattering of short waves[J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2004, **28**(2): 131-141.
- [7] GUDDATI M N, YUE B. Modified integration rules for reducing dispersion error in finite element methods[J]. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 2004, **193**(3-5): 275-287.
- [8] BABUSKA I M, SAUTER S A. Is the pollution effect of the FEM avoidable for the Helmholtz equation considering high wave numbers[J]. *SIAM REVIEW*, 2000, **42**(3): 451-484.
- [9] CHAKRABORTY A, GOPALAKRISHNAN S. A spectral finite element model for wave propagation analysis in laminated composite plate[J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2006, **128**(4): 477-488.
- [10] HAM S, LAI B, BATHE K J. The method of finite spheres for wave propagation problems[J]. *Computers and Structures*, 2014, **142**: 1-14.
- [11] GENECHTEN B, VANDEPITTE D, DESMET W. A trefftz-based numerical modelling framework for Helmholtz problems with complex multiple scatter configurations[C]//*Proceedings of the ICCES Special Symposium on Meshless & Other Novel Computational Methods*; 2008, Suzhou, China.
- [12] LAGHROUCHE O, BETTESS P, PERREY-DEBAIN E, et al. Wave interpolation finite elements for Helmholtz problems with jumps in the wave speed[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, **194**(2): 367-381.
- [13] MOHAMED S, MOHAMMED S, TREVELYAN J. A partition of unity FEM for time-dependent diffusion problems using multiple enrichment functions[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2013, **93**(3): 245-265.
- [14] LUOSTARI T, HUTTUNEN T, MONK P. The ultra weak variational formulation using Bessel basis functions[J]. *Communications in Computational Physics*, 2012, **11**(2): 400-414.
- [15] TEZAUR R, KALASHNIKOVA I, FARHAT C. The discontinuous enrichment method for medium-frequency Helmholtz problems with a spatially variable wavenumber[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2014, **268**(1): 126-140.
- [16] MONK P, WANG D Q. A least-squares method for the Helmholtz equation[J]. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 1999, **175**(1): 121-136.
- [17] MOHAMED M S, MOHAMMED S, LAGHROUCHE O. An enriched finite element model with q-refinement for radiative boundary layers in glass cooling[J]. *Journal of Computational Physics*, 2014, **258**: 718-737.
- [18] VERGOT K, VANMAELE C, VANDEPITTE D. An efficient wave based approach for the time-harmonic vibration analysis of 3d plate assembly[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, **332**(8): 1930-1946.
- [19] CHRISTODOULOU K, LAGHROUCHE O, MOHAMED M S. High-order finite element for the solution of Helmholtz problems[J]. *Computers and Structures*, 2017, **191**: 129-139.
- [20] MOHAMED M S, LAGHROUCHE O, EL-KACIMI A. Some numerical aspects of the PUFEM for efficient solution of 2D Helmholtz problems[J]. *Computers and Structures*, 2010, **88**(2): 1484-1491.
- [21] LINTON C M, EVANS D V. The interaction of waves with arrays of vertical circular cylinders[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1990, **215**(1): 549-569.