

# Floquet-Bloch 理论在频散曲线计算中的应用

童 韞 哲, 范 军, 王 斌

(上海交通大学高新船舶与深海开发装备协同创新中心海洋工程国家重点实验室, 上海 200240)

**摘要:** 实现了一种基于波有限元方法计算无限大平面波导中弹性波频散曲线的方法。该方法在有限尺度计算单元两边添加 Floquet-Bloch 周期性边界条件来近似模拟无限大弹性平面波导, 利用有限元 Comsol Multiphysics 软件计算波导中弹性波频散曲线, 并讨论了有限尺度单元长宽之比与计算频段的关系。计算结果与谱方法计算结果对比, 吻合很好, 验证了方法的有效性。该方法回避了复杂特殊函数计算以及超越方程求解的困难, 具有建模和计算简单的优点, 并可推广至其它复杂弹性波导频散曲线的计算。

**关键词:** Lamb 波; 频散曲线; 波有限元法; Floquet-Bloch 理论; 周期性边界条件

中图分类号: O427.2

文献标识码: A

文章编号: 1000-3630(2020)-01-0011-04

DOI 编码: 10.16300/j.cnki.1000-3630.2020.01.002

## Application of Floquet-Bloch theory in dispersion curve calculation

TONG Yunzhe, FAN Jun, WANG Bin

State Key Laboratory of Ocean Engineering, Shanghai 200240, China)

**Abstract:** The Floquet-Bloch theory based on Wave Finite Element (WFE) method for dispersion curve calculation is described in this paper. In the method, the periodic condition of Floquet-Bloch theory adds on both sides of the finite scale calculation cell to approximately simulate an infinite elastic wave guide. The elastic wave dispersion curves in a plane waveguide are obtained by using the commercial Finite Element software 'COMSOL Multiphysics'. The calculation results obtained by WFE method and spectral method are in good agreement. And, the influence of  $R$  (the length to width ratio of the calculation cell) on the correct region of the result is discussed. This method has the advantages of easy modeling and simple calculation due to avoiding the difficulties of calculating complex special functions and solving the complex transcendental equation. This method can also be extended to calculating the dispersion curves of other more complex waveguides.

**Key words:** lamb wave; dispersion curve; Wave Finite Element(WFE) method; Floquet-Bloch theory; periodic condition

## 0 引 言

频散曲线在无损检测、弹性目标声散射机理及水声传播领域都有着广泛用途<sup>[1-5]</sup>。在水下目标声散射的研究当中, 大量的实验结果表明, 水下目标的回波中除了容易解释的几何散射波以外, 总是会出现一些不易解释的非镜面散射波, 这些散射波实际上是在弹性体中传播的波再辐射产生的<sup>[6]</sup>。所以计算弹性波的频散曲线, 了解弹性波的传播规律, 对水下目标声散射的精细特征研究具有至关重要的作用。

对于频散曲线的计算一般都归结为特征方程零点的求解:

$$F(\omega, k) = 0 \quad (1)$$

其中:  $k$  为行波波数;  $\omega$  为角频率。目前求解公式(1)的方法主要有三种: (1) 谱方法。该方法是一种较传统的解析方法。谱方法数值插值的方法直接求解特征方程, 具有计算量小, 计算精度高的优点<sup>[7-11]</sup>。(2) 半解析半有限元(Semi-Analytical Finite Element, SAFE)法。该方法结合了有限元与解析解表达式的特点, 只对波导截面进行建模, 因此降低了计算模型的维度<sup>[12]</sup>。(3) 波有限元(Wave Finite Element, WFE)方法。该方法利用波导的周期性, 通过建立一部分波导的有限元模型以及周期边界条件获得相应的刚度矩阵, 并求解特征根<sup>[13]</sup>。

鉴于目前的商用有限元软件的求解器能够非常成熟地应用周期边界条件求解特征方程, 本文引入了波有限元(WFE)方法求解频散曲线<sup>[13]</sup>。常规有限元方法无法实现无限长的波导建模, 所以需要引入基于 Floquet-Bloch 理论的周期性边界条件。Floquet 理论是微分方程理论的一个分支, 它是求解形如  $x(t) = A(t)x(t)$  的周期性线性微分方程的一种方法, 其中  $A(t)$  是周期为  $T$  的分段连续周期函

收稿日期: 2019-06-07; 修回日期: 2019-08-10

作者简介: 童韞哲(1990—), 男, 江西鹰潭人, 博士研究生, 研究方向为水中目标声散射特征。

通讯作者: 范军, E-mail: fanjun@sjtu.edu.cn

数, 在固体物理学中叫做 Bloch 理论。

## 1 Floquet-Bloch 理论在求解弹性体频散曲线中的应用

有限元方法求解弹性体频散曲线的关键在于利用 Floquet-Bloch 理论将长度为  $L$ 、高度为  $h$  的有限长弹性体控制方程中的位移/振速写成行波形式。省略时间因子  $e^{i\omega t}$ , 弹性体控制方程可以写成:

$$\nabla \sigma + \rho \omega u = 0 \quad (2)$$

其中:  $\sigma$  是应力张量,  $u$  是位移张量。将位移  $u$  的解写成平面波的形式:

$$u(x, y) = f(y) e^{ik_x x} \quad (3)$$

公式(3)表示某一特定振动状态  $f(y)$  沿着  $x$  方向以行波的形式传播, 振动状态只是  $y$  的函数, 在传播过程中不发生变化, 长度为  $L$ 、高度为  $h$  的计算单元示意图如图 1 所示。

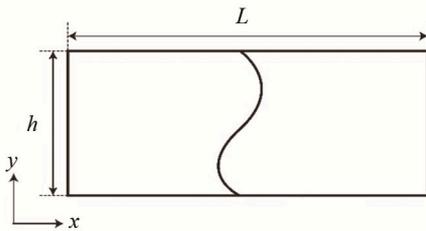


图 1 计算单元示意图  
Fig.1 Schematic diagram of calculation cell

长度为  $L$  的单元左边位移和右边位移存在如下关系:

$$u(x+L, y) = f(y) e^{ik_x x} e^{ik_x L} = u(x, y) e^{ik_x L} \quad (4)$$

由于  $u$  以行波方式沿着  $x$  方向传播, 振动状态与  $x$  无关。二维无限长板可以近似认为沿  $x$  方向周期为  $L$  的周期性结构, 利用 Floquet-Bloch 理论, 存在如下关系:

$$u_{\text{left}}(x, y) = u_{\text{right}}(x, y) e^{ik_{\text{FB}} L} \quad (5)$$

其中:  $k_{\text{FB}}$  是 Floquet-Bloch 理论的指数因子,  $k_{\text{FB}}$  与  $x$  方向的波数  $k_x$  有如下关系:

$$k_x = \frac{2n\pi}{L} + k_{\text{FB}} \quad (6)$$

详细理论推导参见文献[13]。

## 2 有限元计算结果与谱方法的对比

有限元在求解频散曲线时的困难在于无法建立无限长的波导, Floquet-Bloch 理论实际上是对如图 1 所示的计算单元施加边界条件以模拟无限长波导。COMSOL 软件中 Floquet 周期边界条件模块能

够实现这一功能, 其公式为

$$u_{\text{dst}}(x, y) = u_{\text{src}}(x, y) e^{-ik_F(r_{\text{dst}} - r_{\text{src}})} \quad (5)$$

其中:  $u_{\text{src}}$  和  $r_{\text{src}}$  是源边界的位移和坐标;  $u_{\text{dst}}$  和  $r_{\text{dst}}$  是目标边界的位移和坐标, 详细信息参见文献[14]。

在 COMSOL 软件中建立如图 2 所示的模型, 在模型两边添加 Floquet 周期性边界条件, 并输入不同的行波波数  $k_F$ , 将有限长区域模拟成无限长波导, 再利用特征频率求解器求解相应  $k_F$  所对应的特征频率  $\omega$ 。

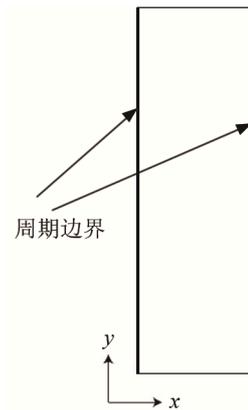


图 2 有限元计算示意图  
Fig.2 Schematic diagram of finite element calculation

因为只考虑沿  $x$  轴传播的行波, 所以向量  $k_F$  在  $y$  轴投影为 0, 令其在  $x$  轴的投影为  $k_x$ 。由式(6)可知, 当  $n=1$  时,  $k_x$  的取值范围是  $0 \sim 2\pi/L$ , 实际上  $k_x$  取  $0 \sim \pi/L$  最合理, 具体情况会在下文讨论。使用 COMSOL 的搜根求解器可以求得  $k_x$  满足计算单元的特征方程所对应的所有特征频率  $f$ , 由特定的  $k_x$  及与其对应的特征频率  $f$  可求得对应的相速度  $C_p = 2\pi f / k_x$ 。本文计算了两边真空的弹性平板频散曲线, 参数为:  $\rho = 7900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , 纵波声速  $C_L = 5940 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , 剪切波速  $C_T = 3100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , 板的厚度  $h = 40 \text{ mm}$ 。

图 3 为有限元与谱方法<sup>[3]</sup>计算结果对比, 横坐

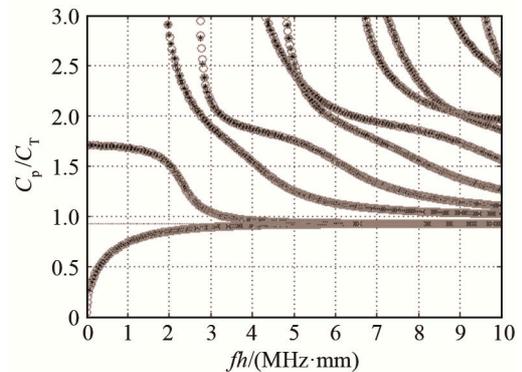


图 3 有限元与谱方法计算结果对比图  
Fig.3 Comparison of calculation results of WFE method and spectral method

标为频率与板厚之积，纵坐标是相速度  $C_p$  与剪切波速之比。两者吻合得非常好，从而证明了基于 Floquet-Bloch 理论的有限元建模方法的正确性。

### 3 对于计算单元长度与高度之比值 $R$ 的讨论

选取合适的  $R$  ( $R$  为计算单元的长度  $L$  与高度  $h$  之比) 对于计算结果至关重要。本文所提到的方法是用 Floquet-Bloch 周期边界条件模拟无限长的情况，所以存在一定的局限性，这一局限性主要体现在  $R$  的大小与计算结果的关系。

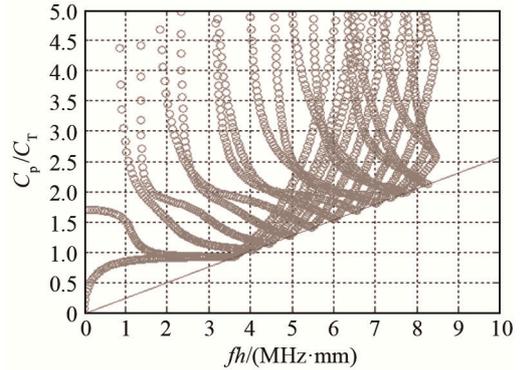
图 4 是相同计算参数、不同  $R$  值的计算结果，红线分割了计算结果的有效区和无效区。由式(4)中  $e^{ik_x L}$  的周期性和对称性可知波数  $k_x$  必须满足：

$$0 < k_x < \frac{\pi}{L} \quad (6)$$

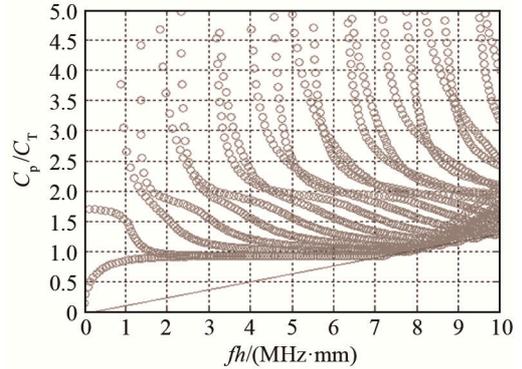
因此， $k_x$  所对应的特征频率  $f$  和相速度  $C_p$  必然满足：

$$\frac{2\pi f}{C_p} < \frac{\pi}{L} \quad (7)$$

对公式(7)乘以厚度  $h$ ，经过变换可以得到相速度  $C_p$  与频率必须满足：



(c)  $R=0.2$  的计算结果



(d)  $R=0.1$  的计算结果

图 4 不同  $R$  计算结果对比

Fig.4 Comparison of calculation results of WFE method for different  $R$  values

$$\frac{C_p}{2fh} > R \quad (8)$$

由图 4(a)~4(d)可以看出：计算结果的有效区域随  $R$  的减小而增大，这一规律完全符合公式(13)。此外，根据经验可知，当  $R=0.1$  时计算结果较好，本文中的图 3 即是使用  $R=0.1$  计算得到的结果。

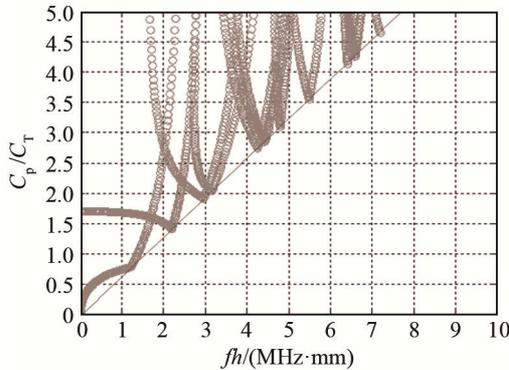
### 4 结论

本文简要阐述了 Floquet-Bloch 理论及其在频散曲线计算上的应用。在此基础之上，分析了其计算结果的局限性，为将此方法进一步应用于更加复杂的计算奠定了基础。

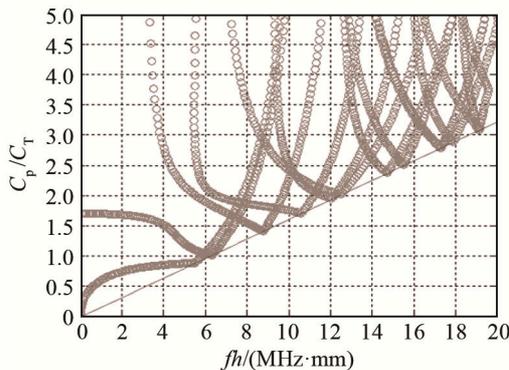
本文得到以下主要结论：

(1) 利用基于 Floquet-Bloch 理论的周期性边界条件的有限元建模方法，能够准确计算弹性体的频散曲线；

(2) 通过周期性边界条件将有限长弹性体近似成无限长波导存在一定的局限性，这一局限性体现在计算单元长度与高度之比  $R$  对于计算结果正确区域的影响；



(a)  $R=1$  的计算结果



(b)  $R=0.5$  的计算结果

(3) 使用有限元法计算频散曲线较之传统的迭代法与谱方法有着操作简单、不受波导形状影响等优势。

### 参 考 文 献

- [1] SU Z Q, LIN Y. Identification of damage using Lamb waves: from fundamentals to applications[J]. Springer Science & Business Media, 2009(48): 1-14.
- [2] KESSLER S S, SPEARING S M, SOUTIS C. Damage detection in composite materials using Lamb wave methods[J]. Smart Materials and Structures, 2002, 11(2): 269.
- [3] YAN G. A Bayesian approach for damage localization in plate-like structures using Lamb waves[J]. Smart Materials and Structures, 2013, 22(3): 035012.
- [4] RATHOD V T, D Roy Mahapatra. Ultrasonic Lamb wave based monitoring of corrosion type of damage in plate using a circular array of piezoelectric transducers[J]. NDT & E International, 2011, 44(7): 628-636.
- [5] WANG D, YE L, LU Y, et al. A damage diagnostic imaging algorithm based on the quantitative comparison of Lamb wave signals[J]. Smart Materials and Structures, 2010, 19(6): 065008.
- [6] 汤渭霖, 范军, 马忠成. 水中目标声散射[M]. 北京: 科学出版社, 2018: 77-121.
- [7] KREISS H O, OLIGER J. Comparison of accurate methods for the integration of hyperbolic equations[J]. Tellus, 1972, 24(3): 199-215.
- [8] ADAMOU A T I, CRASTER R V. Spectral methods for modelling guided waves in elastic media[J]. J. Acoust. Soc. Am., 2004, 116(3): 1524-1535.
- [9] 于保华, 杨世锡, 甘春标, 等. 高温圆管轴对称导波频散特性的谱方法[J]. 浙江大学学报(工学版), 2014, 48(9): 1668-1675.  
YU Baohua, YANG Shixi, GAN Chunbiao, et al. Spectral method on exploring dispersion characteristics of axially symmetric guided waves in high-temperature tube[J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2014, 48(9): 1668-1675.
- [10] 王献忠, 吴卫国, 庞福振, 等. 基于谱方法分析有阻尼负载圆柱壳频散特性[J]. 振动与冲击, 2015, 34(6): 13-17, 23.  
WANG Xianzhong, WU Weiguo, PANG Fuzhen, et al. Spectral method for dispersion characteristics of a cylindrical shell boarded with a damping layer[J]. Journal of Vibration and Shock, 2015, 34(6): 13-17, 23.
- [11] 郭杨阳, 范军, 熊磊. 波导中弹性波频散曲线计算的谱方法[J]. 上海交通大学学报, 2016, 50(11): 1784-1788.  
GUO Yangyang, FAN Jun, XIONG Lei. Spectral method for computing frequency dispersion curves of elastic waves in wave guide[J]. Journal of Shanghai Jiao Tong University, 2016, 50(11): 1784-1788.
- [12] AHMAD Z A B, GABBERT U. Simulation of Lamb wave reflections at plate edges using the semi-analytical finite element method[J]. Ultrasonics, 2012, 52(7): 815-820.
- [13] GOMEZ G P, FERNANDEZ A J P. Floquet-Bloch theory and its application to the dispersion curves of nonperiodic layered systems[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2015(2015): 475364.
- [14] COMSOL Multiphysics reference manual[EB/OL]. 2017. <https://www.comsol.eu/documentation>.