

应用非线性 Lamb 波识别三维铝板中的微裂纹方向的研究

祝伟光, 关立强, 李义丰

(南京工业大学计算机科学与技术学院, 江苏南京 211800)

摘要: 针对结构中不同裂纹方向的检测问题, 采用数值模拟的方法, 通过有限元软件 ABAQUS 建立了一种包含人工粘弹性吸收边界的三维铝板模型, 对 Lamb 波 S_0 模态信号与微裂纹的非线性关系进行研究。在该模型中, 将三维埋藏微裂纹嵌入到模型内部的固定位置, 在相同激励条件下改变裂纹方向并对仿真获得的时域信号进行频谱分析, 然后对不同裂纹方向的二次谐波与基波信号的幅值比指向性图的变化规律进行了比较和讨论。仿真结果表明, 不同方向的裂纹对 Lamb 波在裂纹区的散射场分布有明显的影响, 波的传播路径满足反射定律, 且前向散射信号的幅值比普遍大于后向散射的幅值比。加上人工吸收边界后, 前向散射与后向散射的幅值比差值随着裂纹方向角度的增大而增大。检测结果表明, 该方法可以在误差允许范围内对任意裂纹方向的角度进行识别。

关键词: 非线性 Lamb 波; 三维埋藏裂纹; 微裂纹方向; 吸收边界; 幅值比

中图分类号: TB559

文献标识码: A

文章编号: 1000-3630(2020)-02-0161-08

DOI 编码: 10.16300/j.cnki.1000-3630.2020.02.007

Research on the application of nonlinear Lamb wave to identifying the directions of micro-cracks in three-dimensional aluminum plate

ZHU Weiguang, GUAN Liqiang, LI Yifeng

(College of Computer Science and Technology, Nanjing Tech University, Nanjing 211800, Jiangsu, China)

Abstract: Crack direction recognition is an important part of structural quality monitoring. To solve the problem of detecting different directions of the micro-cracks buried in three-dimensional thin plate structures, a method of numerical simulation is adopted. An improved three-dimensional aluminum plate model including artificial viscoelastic absorbing boundary is established by finite element software ABAQUS. The nonlinear interaction between the S_0 mode Lamb wave and the buried micro-crack is investigated. The buried micro-crack is embedded at a fixed position in the plate model. Different micro-crack directions under the same excitation condition are simulated. Fourier frequency spectral analysis is applied to the received signals. Then, the directivity diagrams of the amplitude-ratio of second harmonic to fundamental wave in different crack directions are compared and discussed. Simulation results indicate that cracks in different directions have a distinct effect on the distribution of Lamb wave scattering field in the crack zone; The wave propagation path satisfies the reflection law, and the amplitude ratio of forward-scattering signal is generally larger than that of the back-scattering signal; The artificial absorption boundary can minimize the influence of the reflected wave, and the energies of the fundamental frequency and second harmonic signals become more concentrated and stable; Meanwhile, the amplitude ratio difference between forward-scattering and back-scattering increases with the increase of crack direction angle. The detection results show that the method can identify any crack direction angle within the allowable error range.

Key words: nonlinear Lamb wave; three-dimensional buried crack; micro-crack direction; absorbing boundary; amplitude ratio

0 引 言

板状结构在船舶工业、汽车工业、桥梁建筑等

工程领域中应用十分普遍。在长期的使用过程中, 板状构件受到外力冲击、高压振动、化学腐蚀、热疲劳等各种因素的影响, 极容易产生缺陷、裂纹、通孔等损伤, 对结构的危害性很大, 甚至会诱导灾难性的后果。因此板状构件的结构健康监测 (Structural Health Monitoring, SHM) 对预防和避免事故的发生有很重要的意义^[1-2]。

无损检测 (Non-destructive Testing, NDT) 凭借高效性和实时性成为 SHM 系统中不可替代的检测手

收稿日期: 2019-03-10; 修回日期: 2019-04-22

基金项目: 国家自然科学基金(615741222)资助项目、江苏省六大人才高峰高层次人才项目

作者简介: 祝伟光(1992—), 男, 江苏东台人, 硕士研究生, 研究方向为 Lamb 波无损检测。

通讯作者: 李义丰, E-mail: lyffz4637@163.com

段^[3]。NDT 包括多种常规检测方法, 由于超声波具有穿透能力强、灵敏度高、无污染的优点, 使得超声检测的使用最为广泛^[4]。在厚度较薄的薄板结构中传播的波称为 Lamb 波, 与传统的超声导波相比, Lamb 波凭借在薄板结构中传播时衰减和传播距离长的优点被广泛应用在板状结构和壳体结构的损伤检测中^[1-2]。

线性 Lamb 波对尺寸远小于检测声波波长的早期疲劳微裂纹的敏感度较低^[2], 而非线性 Lamb 波信号对由结构内微裂纹引起的反射、散射等物理现象更为敏感^[5], 因此非线性 Lamb 波的 NDT 研究得到了越来越多的关注^[6]。非线性超声检测可以分为高次谐波技术^[6]、次谐波技术^[7]、非线性共振超声波谱技术^[8]、混频技术^[9]等。其中, 谐波检测在非线性超声检测中应用最为广泛。

近年来, 国内外研究人员利用非线性 Lamb 波谐波法对结构微裂纹进行了大量效果显著的研究^[10-12]。Zhou 等^[10]通过对超声非线性的实验研究, 证明了高次谐波可以用来评估疲劳裂纹。Wang 等^[11]使用非线性 Lamb 波检测钢板和碳纤维增强塑料(Carbon Fiber Reinforced Plastic, CFRP)加固钢板的疲劳裂纹, 通过数值仿真和实验研究, 发现二次谐波可以有效识别疲劳裂纹。Yelve 等^[12]利用非线性 Lamb 波实现对复合材料层合板的分层缺陷的检测。这些研究都说明了通过对仿真实验过程中携带裂纹信息的谐波进行分析, 非线性 Lamb 波可以实现对微裂纹的损伤检测。但是, 目前只有少数研究人员对裂纹的方向角度进行检测, 也鲜有学者对不同角度的裂纹对结构的稳定性带来的影响进行深入的探究。其中, Lu 等^[13]通过对反射系数和透射系数进行分析, 发现小尺寸裂纹对入射波角度更敏感, 并且评估了裂纹方向对 Lamb 波在铝板中传播的影响。焦敬品等^[14]通过数值仿真分析了超声波与不同方向微裂纹的非线性相互作用。这些研究都是基于二维模型展开的裂纹方向检测, 而对于三维(Three-dimensional, 3D)埋藏微裂纹方向的识别研究还没有涉及到。

本文通过 3D 有限元数值仿真, 对非线性 Lamb 波 S_0 模态信号与结构内部的不同方向微裂纹的相互作用进行了相关研究。对初始模型仿真后, 通过快速傅里叶变换(Fast Fourier Transform, FFT)分析接收信号的二次谐波幅值比分布规律。之后在初始模型周围加上吸收边界使反射波的影响降到最低, 再分析和比较两种模型的幅值比指向性图的变化

趋势, 以完成对埋藏微裂纹的方向识别。

1 非线性 Lamb 波基本理论

Lamb 波是超声波在固体板中经上下边界来回反射形成的一种应力波^[15-16]。应用在 NDT 领域时, Lamb 波与缺陷损伤相互作用引起的非线性效应来源于两个方面: 一是两者接触界面的弹性不对称, 表现为应力-应变关系的非线性; 二是由于 Lamb 波传播的影响, 裂纹面受到拉伸-挤压而不断振动使响应信号产生滞回效应。

Lamb 波在板内传播到非线性区域时, 会产生高次谐波, 其产生机理与材料的非线性弹性行为有关。根据经典非线性理论, 在有限振幅激励条件下, 材料中的应力 σ 与应变 ε 的关系是非线性的, 对于一维情况, 可以用非线性 Hooke 定律^[17]表示:

$$\sigma = E_0 \varepsilon (1 + \beta \varepsilon + r \varepsilon^2 + \dots) \quad (1)$$

式(1)中: σ 表示应力; ε 表示应变; E_0 为弹性模量; β 是二阶非线性弹性系数, r 为三阶非线性弹性系数。这种非线性称为经典非线性。经典非线性主要研究固体介质的本构物理特性对声传播特性的影响, 就是通过应力-应变关系的非线性系数来描述的。本文研究的非线性是由闭合微裂纹或分层缺陷等引起的, 对于由这类损伤产生的超声非线性现象可以使用接触非线性来阐释。

超声波遇到闭合微裂纹、分层等接触类损伤时, 会出现无法用传统线性理论解释的高次谐波等非线性现象, 于是接触非线性的超声理论就逐渐发展起来了。这种接触非线性反映了材料局部的非线性特征, 相关的物理模型通常涉及裂纹面的接触、摩擦、裂纹尖端的塑性等, 这些非线性源的存在使超声波在传播时与其相互作用后发生强非线性失真, 从而产生高次谐波。国内外学者将这种由微裂纹产生的高次谐波响应称为接触声非线性(Contact Acoustic Nonlinearity, CAN)^[11, 17-18]现象。

CAN 现象产生的物理机制是当超声波到达一个有裂纹的接触面时, 裂纹被纵波不停地拉伸和挤压造成裂纹面的反复振动, 裂纹在波的压缩阶段闭合, 未受干扰的波可以通过裂纹继续传播, 而裂纹在波的拉伸阶段张开, 部分波的反射影响了波的传播^[18]。这种因为超声波的传播而使裂纹面不断接触的现象也称为 CAN 效应, 其示意图如图 1 所示, 波在通过裂纹区后表现为半波整流, 呈现出明显的非线性特征, 导致了高次谐波的产生^[11]。

本文研究的固体介质为薄铝板, 其结构内部的

微裂纹非线性超声检测问题属于接触非线性的范畴。因此，可以根据检测到的响应信号中是否存在二次谐波或高次谐波来评估结构内部的微裂纹等非线性源。

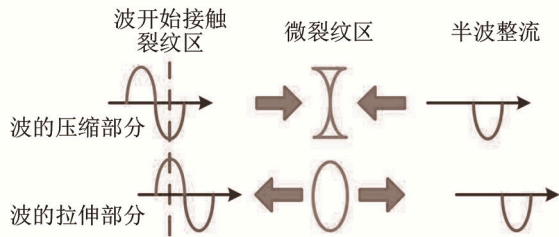


图 1 声接触非线性效应示意图
Fig.1 Schematic diagram of the contact acoustic nonlinearity effect

2 3D 有限元仿真

2.1 有限元模型

使用有限元软件 ABAQUS 建立三维有限元模型，通过显式动力学分析法对非线性 Lamb 波在铝板中的传播进行仿真。

2.1.1 初始模型

模型尺寸与铝板材料参数如表 1 所示。在板面的正中心上下两点沿离面方向施加对称应力载荷，产生沿 z 轴方向对称传播的纵波，形成单 S_0 模态信号。仿真时所用信号源激励为 450 kHz 的汉宁 (Hanning)窗调制 5 个周期的正弦波信号，波形和频谱如图 2 所示。裂纹中心位置在激励点 y 轴负方向 80 mm 处，裂纹类型为分层缺陷，用长为 2 mm、高为 1.2 mm 的 Cohesive 界面单元来嵌入到模型内部创建埋藏微裂纹模型，裂纹长度方向即为模型 x 轴方向。接收点是以裂纹中心为圆心、半径为 40 mm

的等角度接收阵列，每个相隔 30° ，分别为 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{12}$ 共 12 个接收点，如图 3 所示。

Cohesive 界面单元可以理解作为一种准二维单元，将它看作被一个厚度隔开的两个面，这两个面

表 1 模型尺寸与铝板材料参数			
Table 1 Model dimensions and parameters of aluminum plate material			
模型尺寸/ (mm×mm×mm)	密度 $\rho/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	杨氏模量 E/GPa	泊松比 λ
320×320×1.6	2 700	69	0.33

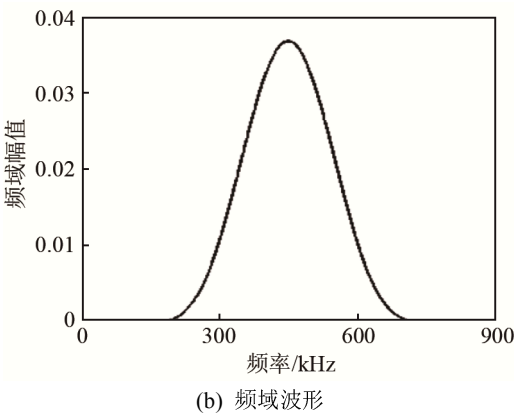
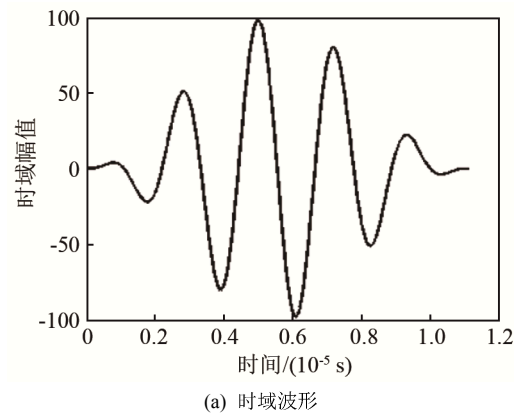


图 2 铝板模型激励信号
Fig.2 Excitation signal of aluminum plate mode

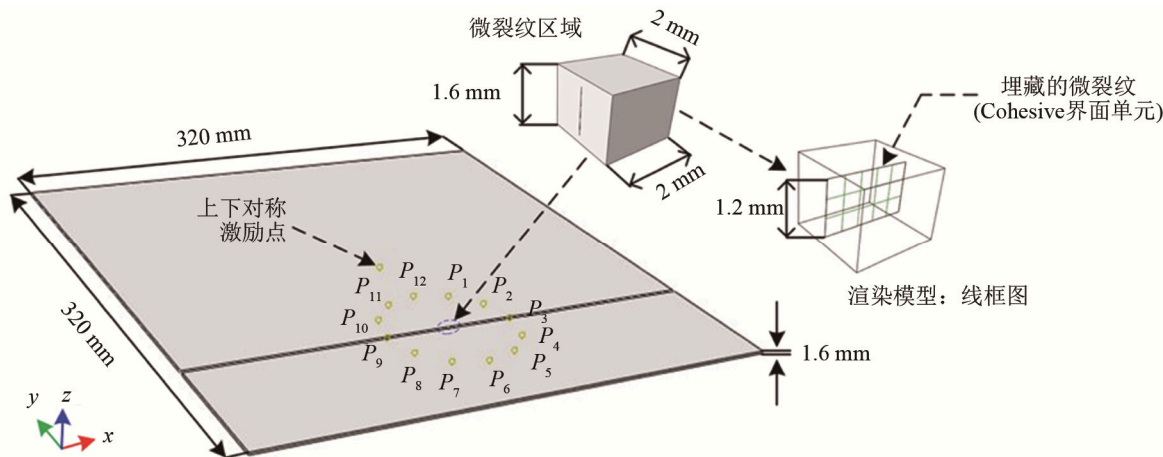


图 3 铝板 3D 模型尺寸及损伤模式示意图
Fig.3 Schematic diagrams of 3D aluminum plate model dimensions and damage modes

分别和其他实体单元连接。在预定的裂纹区创建 Cohesive 单元时,在相同的位置就会有重复的节点编号,当施加的力达到单元强度的临界值时,Cohesive 单元从产生损伤到最后失效可以表征结构分层破坏模式,达到模拟分层缺陷的效果。包含 cohesive 单元的模型单独创建后嵌入到主板模型,并为之建立绑定约束,接触类型为硬接触、无摩擦。

为保证求解过程中的收敛性和稳定性,以及确保模型在波的传播过程中的高效率 and 足够的计算精度,有限元分析中网格单元最大的尺寸和最大分析时间步长都应满足一定条件。虽然较小的网格单元可以提高计算精度,但这也需要花费更多的计算时间和消耗更多计算机资源,导致计算效率降低。因此考虑到本文基频为 450 kHz,通过式(2)和式(3)分别求解最大网格单元尺寸 $L_{\max}$ 和最大分析时间步长 $\Delta t_{\max}$:

$$L_{\max} = \frac{\lambda_{\min}}{20} = \frac{c_p}{20f_{\max}} \quad (2)$$

$$\Delta t_{\max} = \frac{1}{20f_{\max}} \quad (3)$$

由式(2)、(3)可求得 $L_{\max} = 0.58 \text{ mm}$, $\Delta t_{\max} = 111 \text{ ns}$,所以,本文对模型的网格划分尺寸为 0.5 mm ,时间步长设置为 110 ns 。此外,本文对微裂纹模型区域的网格进行局部细化,其网格单元尺寸设置为 0.4 mm ,以确保模型的计算精度以及二次谐波的产生效率。

2.1.2 吸收边界模型

为了降低端面反射波对接收信号的影响,在模型的四周添加吸收边界^[19]和等效三维一致粘弹性人工边界组合的混合边界单元模型^[20],以达到分析的目的。

吸收边界就是在原模型的边界处向外延伸 15 mm 的区域施加瑞利阻尼。等效三维粘弹性边界属于在有限元模型边界沿法线方向延伸 5 mm 的一层界面单元,即添加粘性阻尼,其处于模型最外围。两者共同组成混合人工吸收边界单元,其 x - y 平面示意图如图 4 所示。

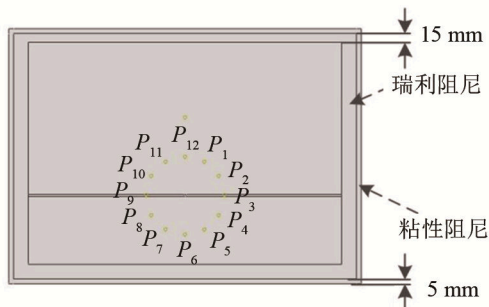


图 4 混合人工吸收边界的铝板模型

Fig.4 A plate model with mixed artificial absorbing boundary

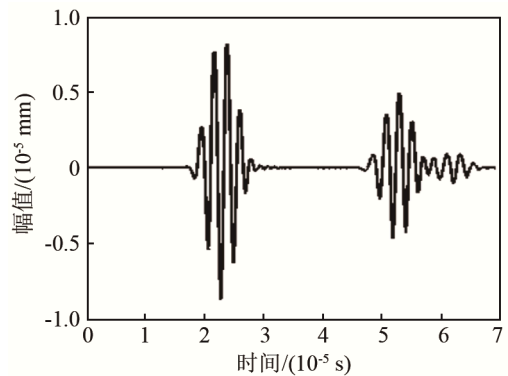
图 4 给出了含吸收边界模型的示意图,与初始模型相比,除了添加了混合人工吸收边界单元,其他仿真参数,包括模型尺寸、激励信号与激励点、微裂纹模式、接收点等都与初始模型一致,这样可以保证仿真效果的对比度足够清晰。

2.2 仿真结果与分析

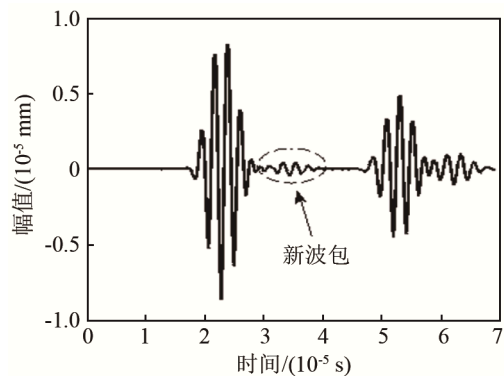
2.2.1 初始模型仿真结果

接下来通过将有微裂纹板和无损板的有限元仿真结果进行对比,验证 Lamb 波与微裂纹相互作用产生二次谐波的非线性效应。

图 5(a)和 5(b)分别给出了无损板和有损板在 P_9 点的时域接收信号。经过计算,图 5(a)中的第一个波包为 S_0 模态直达波,第二个波包为直达 S_0 模态下端面反射波与直达 S_0 模态左端面反射波的混合波。图 5(b)有损板的波分布情况与无损板相比,直达 S_0 波后面多了一个新的波包,根据频散曲线数据以及模型的尺寸和波包所出现的时间,可知此新波包为微裂纹反射 A_0 模态波。从图 5 可以明显看出无损板和有损板的时域接收信号的不同,仿真过程出现的非线性效应主要体现在包含微裂纹信息的新波包内。



(a) 无损板



(b) 有损板

图 5 在 3D 铝板 P_9 点接收的时域信号

Fig.5 Time domain signals received at the point P_9 of aluminum plate

2.2.2 吸收边界模型仿真结果

为了确认添加人工混合吸收边界模型的仿真效果,将这两种包含微裂纹模型的时域响应信号进行对比,结果如图 6 所示。由图 6 可以明显看出波包的幅值变化,基波和新波包的幅值几乎不变,而吸收边界模型的反射波包幅值出现大幅度下降。这说明 Lamb 波在板中传播到达边界处后,人工混合吸收边界的存在使反射波的大部分能量被吸收,从而降低了反射波对谐波检测的影响,提高了检测效率。

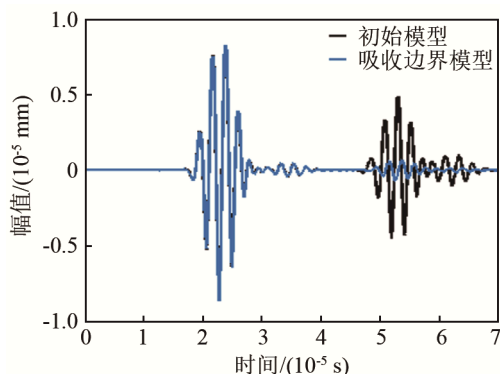


图 6 初始模型和吸收边界模型叠加的时域信号

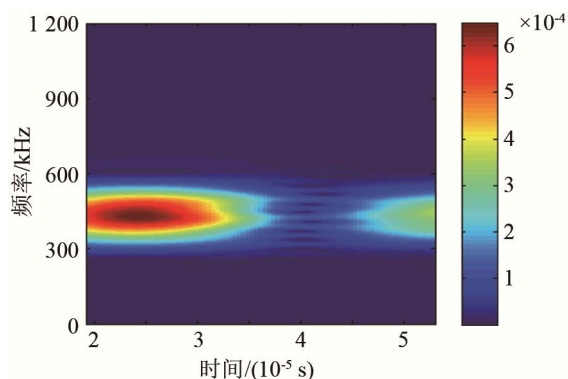
Fig.6 Superposition of the received time domain signals from an initial model and a model with absorbing boundary

尽管从时域波形上看,只有反射波的幅值大幅度减小,但是基频信号特别是新波包的频散程度在一定程度上有所降低。图 7 给出了两种模型的时域接收信号经过短时傅里叶变换后的时频图,除了反射波的能量变化异常明显外,还可以清晰地看出基频信号的能量变得更加集中,而且新波包也明显地从基波中分离了出来,和初始模型相比更容易被观察到,提高了检测精度。

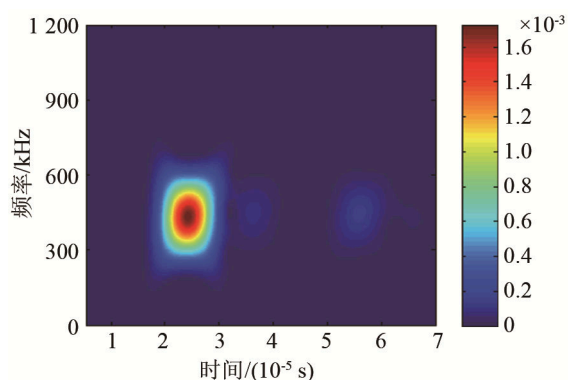
2.2.3 幅值比分析

为了进一步研究 Lamb 波与裂纹的非线性相互作用关系,先要对 Lamb 波与微裂纹相互作用产生的新波包进行分析。通过 FFT 对有损板中的新波包进行频谱分析,结果如图 8 所示。已知激励源信号的频率为 450 kHz,图中第一个波包的峰值对应的频率分量为 450 kHz,而第二个波的峰值对应的频率分量为 900 kHz。所以,在新波包的频谱中除了出现了基频分量,还出现了二倍频分量,这证实了 Lamb 波信号与埋藏微裂纹相互作用引发了 CAN 效应,从而在裂纹反射模态中出现了高次谐波分量。

为了验证微裂纹方向与二次谐波的关系,针对不同方向埋藏微裂纹的 Lamb 波进行了非线性仿真。保持裂纹的尺寸(长为 2 mm,高为 1.2 mm)和位置(激励点 y 轴负方向 80 mm 处)不变,以之前仿真的裂纹方向 0°(高度方向垂直模型 x-y 平面,长度



(a) 初始模型



(b) 吸收边界模型

图 7 两种模型接收信号的时频分布
Fig.7 Time-frequency distributions of the received signals from two models

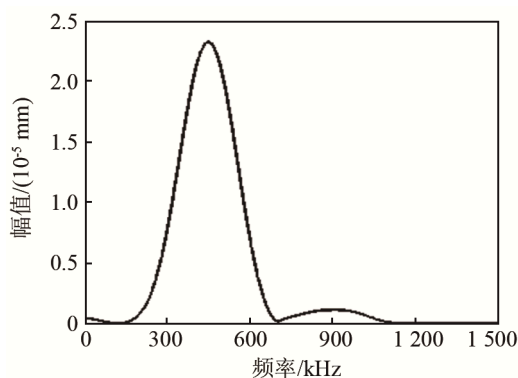


图 8 Lamb 波与微裂纹相互作用产生的新波包频谱图
Fig.8 Frequency spectrum of the new packet generated by interaction of Lamb waves with micro-cracks

方向为 x 轴方向)为基准,逆时针改变裂纹长度方向的角度 θ ,分别取 $\theta=30^\circ$ 、 60° 、 90° 、 120° 、 150° 进行仿真分析。定义散射系数为时域信号包络中包含裂纹信息的新波包峰值与基波峰值之比^[13]。图 9 给出了不同裂纹角度的接收信号散射系数分布情况。

图 9 中不同标记的曲线代表不同的微裂纹方向角度,由图 9 可知,各个接收点的散射系数一直在变化。由于裂纹的阻挡, P_6 无法直接接收直达波信号,越靠近 P_6 接收点,接收到的信号能量越低,其散射系数就越小,同时接收点 P_3 和 P_9 附近的散射

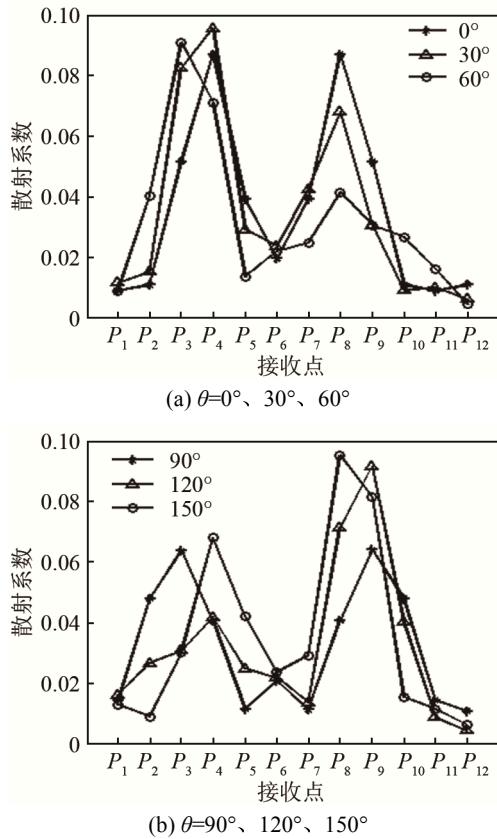


图9 不同裂纹方向角度的接收信号散射系数分布
Fig.9 Scattering coefficient distribution of the received signals with different crack direction angles

系数相对较大,因为此处不仅接收直达波,还接收了经裂纹尖端折射后的波。整个散射系数分布波动较大,变化规律不够明显,下面将进一步进行幅值比指向性的分析。

通过 FFT 对改变 θ 值后仿真得到的裂纹反射 A_0 模态进行频谱分析,可以进一步发现非线性谐波信号与裂纹方向的关系。定义非线性参数幅值比为 $\beta^{[2]}$:

$$\beta = \frac{A_2}{A_1} \quad (4)$$

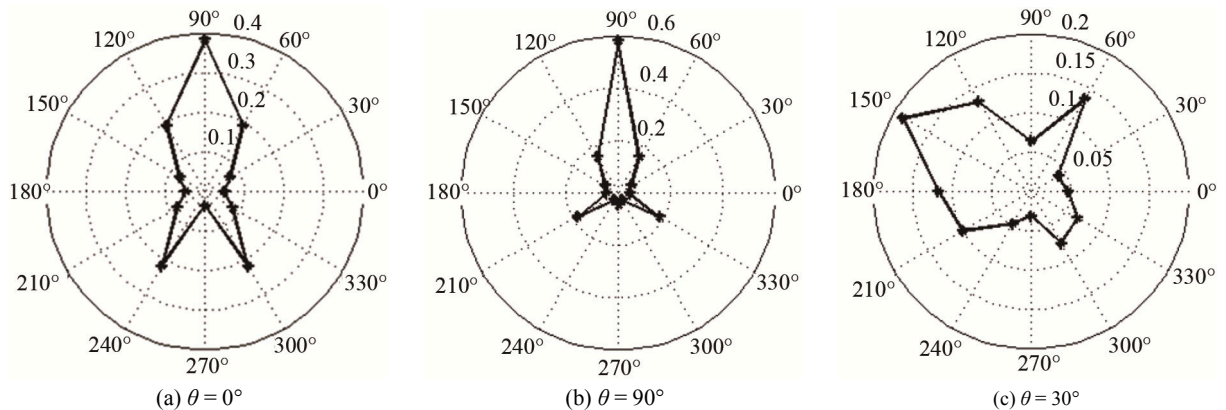
式中: A_2 表示二次谐波频域分量的波峰幅值, A_1 为基频分量的波峰幅值。

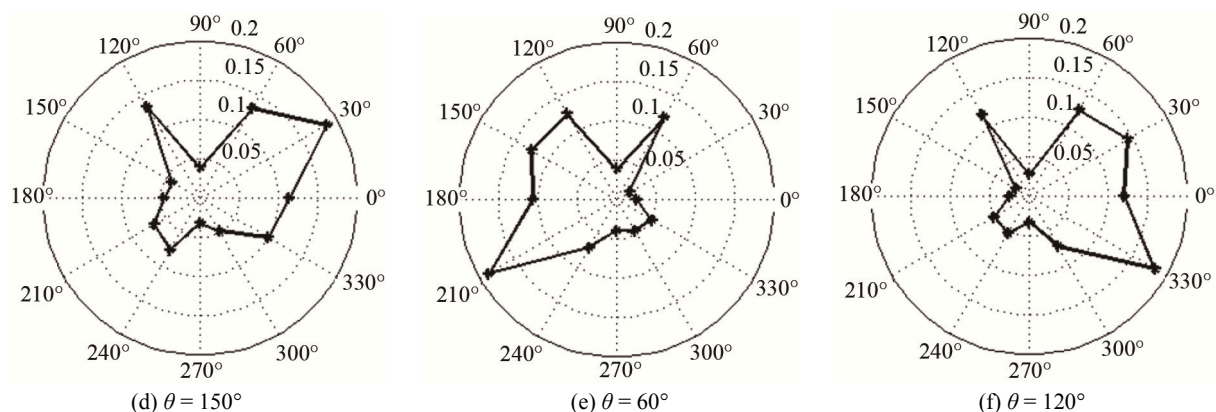
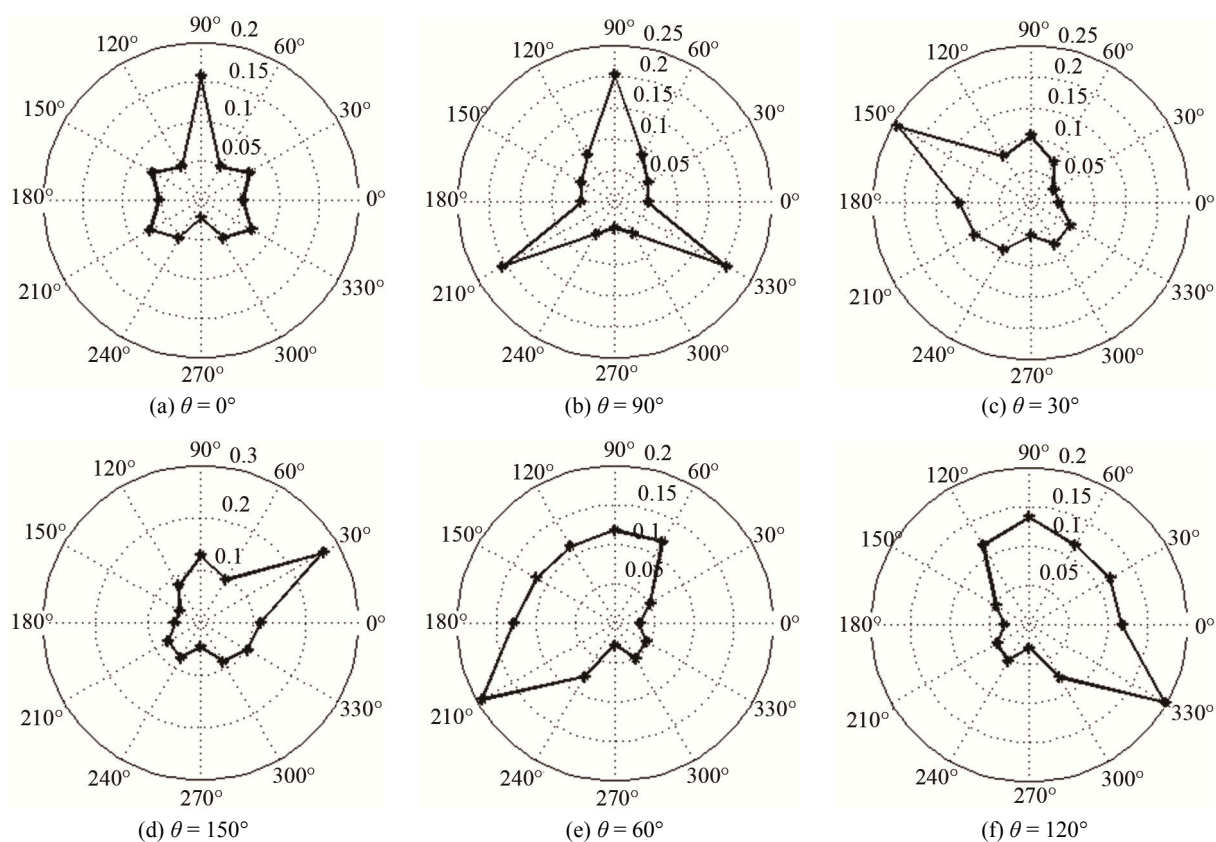
根据式(4)计算初始模型改变裂纹角度后的幅值比,图 10 给出了所有仿真全部接收点的幅值比指向性图。其中由于 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{12}$ 这 12 个接收点在一个半径为 40 mm 的圆上,且等间距为 30°,正好是时钟的 12 个整点位,所以图 10 中的 0°到 330°既可以表示裂纹的方向角度,也可以与各位位置的接收点相对应,即 P_1 对应 60°, P_2 对应 30°,以此类推。

由图 10 可知,幅值比指向性图在 $\theta=30^\circ$ 与 $\theta=150^\circ$, $\theta=60^\circ$ 与 $\theta=120^\circ$ 时几乎是关于垂直方向的直线对称的,因此只需要对 0°, 30°, 60°, 90°的指向图进行分析。当 $\theta=0^\circ$ 和 90°时, P_{12} 的幅值比最大,其他接收点的幅值比较小,且本身分布情况几乎关于 P_{12} 和 P_6 两点所在直线对称。当 $\theta=30^\circ$ 和 60°时,前向散射的幅值比大于后向散射的幅值比,同时波的传播基本满足广义反射定律,即波经过不同方向裂纹反射后,在反射路径上的对应的接收点幅值比最大。

所以,这种方法对裂纹方向有一定的识别度,但是由于其无法有效地区分 $\theta=0^\circ$ 或 90°的情况而存在一定的局限性。同时其他角度的指向性图幅值比分布波动较大,指向性不够均匀。而含吸收边界的模型仿真在一定程度上弥补了这些不足。

图 11 给出了增加吸收边界单元后,对不同方向裂纹进行仿真得到的幅值比分布图。由图 11 可知, $\theta=30^\circ$ 、 $\theta=150^\circ$ 和 $\theta=60^\circ$ 、 $\theta=120^\circ$ 时的对称性依然有效,同样只需分析 0°~90°的指向图。观察 $\theta=0^\circ$ 和 90°时的幅值比发现了与之前不一样的特征, $\theta=0^\circ$ 时, P_{12} 处幅值比最大,其他接收点的幅值比较小且分布相对均匀,而 $\theta=90^\circ$ 时,除了 P_{12} 处幅值比大,还有两个幅值比与它相近的接收点,这两个接收点在 P_4 和 P_8 处,与图 9 表现的规律相吻合,这样,就可以有效区分裂纹 0°和 90°的情况。继续分析 $\theta=30^\circ$ 和 60°时的指向图,发现其规律与未加吸收边界时一样,而且幅值比分布更加均匀,说明吸收边界使二次谐波的能量更加集中了。同时,对两个



图 10 初始模型不同裂纹方向角度(θ)的幅值比(β)的指向性图Fig.10 Directivity patterns of amplitude-ratio (β) for different crack direction angles (θ) in the initial model图 11 吸收边界模型不同裂纹方向角度(θ)的幅值比(β)的指向性图Fig.11 Directivity patterns of amplitude-ratio (β) for different crack direction angles (θ) in the model with absorbing boundary

角度的幅值比分布对比分析后,发现前向散射幅值比虽然大于后向散射幅值比,但是其差值是随着裂纹角度的增加而增加的。由于存在对称性, $\theta=120^\circ$ 和 150° 时的规律与 $\theta=60^\circ$ 和 30° 时相同,所以此方法能够较准确地对裂纹方向进行识别。

3 结 论

针对结构中不同裂纹方向的问题,本文建立了一种包含吸收边界的 3D 有限元铝板模型,分别将

不同方向角度的埋藏微裂纹嵌入其中并进行仿真分析。结果表明,随着裂纹方向的变化,Lamb 波在板中传播的路径受到非线性效应影响。对产生的二次谐波进行频谱分析后,发现散射区的波分布规律可以一定程度上评估裂纹的方向,而且加入人工吸收边界后,仿真效果得到明显改善。通过确认幅值比最大的接收点和比较信号前向与后向散射区幅值比的分布情况,根据反射定律,可以推测出裂纹的角度指向。因此,此方法可以有效地对裂纹方向进行识别。

参 考 文 献

- [1] KUDELA P, RADZIENSKI M, OSTACHOWICZ W, et al. Structural health monitoring system based on a concept of Lamb wave focusing by the piezoelectric array[J]. *Mech. Syst. & Signal Pr*, 2018, **108**: 21-32.
- [2] ZHAO Y, LI F, CAO P, et al. Generation mechanism of nonlinear ultrasonic Lamb waves in thin plates with randomly distributed micro-cracks[J]. *Ultrasonics*, 2017, **79**: 60-67.
- [3] YANG R, HE Y, ZHANG H. Progress and trends in nondestructive testing and evaluation for wind turbine composite blade[J]. *Renew. & Sust. Energ. Rev*, 2016, **60**: 1225-1250.
- [4] CASAVOLA C, PALANO F, DE F C, et al. Analysis of CFRP joints by means of t-pull mechanical test and ultrasonic defects detection[J]. *Materials*, 2018, **11**(4): 620-636.
- [5] LIU X, BO L, YANG K, et al. Locating and imaging contact delamination based on chaotic detection of nonlinear Lamb waves[J]. *Mech. Syst. & Signal Pr*, 2018, **109**: 58-73.
- [6] METYA A K, TARAFDER S, BALASUBRAMANIAM K. Nonlinear lamb wave mixing for assessing localized deformation during creep[J]. *Ndt & E Int*, 2018, **98**: 89-94.
- [7] LI W, CHO Y, ACHENBACH J D. Detection of thermal fatigue in composites by second harmonic Lamb waves[J]. *Smart Mater. & Struct*, 2012, **21**(8): 085019.
- [8] JIAO J, SUN J, LI N, et al. Micro-crack detection using a collinear wave mixing technique[J]. *Ndt & E Int*, 2014, **62**(2): 122-129.
- [9] JIAO J, MENG X, HE C, et al. Nonlinear Lamb wave-mixing technique for micro-crack detection in plates[J]. *Ndt & E Int*, 2017, **85**: 63-71.
- [10] ZHOU C, HONG M, SU Z, et al. Evaluation of fatigue cracks using nonlinearities of acousto-ultrasonic waves acquired by an active sensor network[J]. *Smart Mater. & Struct*, 2013, **22**(1): 015018.
- [11] WANG Y, GUAN R, LU Y. Nonlinear Lamb waves for fatigue damage identification in FRP-reinforced steel plates[J]. *Ultrasonics*, 2017, **80**: 87-95.
- [12] YELVE N P, MITRA M, MUJUMDAR P M. Detection of delamination in composite laminates using Lamb wave based nonlinear method[J]. *Compos. Struct*, 2017, **159**: 257-266.
- [13] LU Y, YE L, SU Z, et al. Quantitative evaluation of crack orientation in aluminium plates based on Lamb waves[J]. *Smart Mater. & Struct*, 2007, **16**(5): 1907-1914.
- [14] 焦敬品, 李海平, 吕洪涛, 等. 超声波与不同方向微裂纹的非线性相互作用数值仿真[J]. *北京工业大学学报*, 2018, **44**(5): 708-715.
JIAO Jingpin, LI Haiping, LYU Hongtao, et al. Numerical simulation of nonlinear interaction between ultrasonic and micro-cracks in different directions[J]. *Journal of Beijing University of Technology*, 2018, **44**(5): 708-715.
- [15] WANG W, BAO Y, ZHOU W, et al. Sparse representation for Lamb-wave-based damage detection using a dictionary algorithm[J]. *Ultrasonics*, 2018, **87**: 48-58.
- [16] 杨晓华, 刘学君, 马广婷. 基于多频率数据融合的 Lamb 波损伤定位研究[J]. *声学技术*, 2017, **36**(2): 133-139.
YANG Xiaohua, LIU Xuejun, MA Guangting. Research on multi-frequency data fusion based Lamb wave damage localization[J]. *Technical Acoustics*, 2017, **36**(2): 133-139.
- [17] YELVE N P, MITRA M, MUJUMDAR P M. Spectral damage index for estimation of breathing crack depth in an aluminum plate using nonlinear Lamb wave[J]. *Struct. Control & Hlth*, 2014, **21**(5): 833-846.
- [18] RADECKI R, SU Z, CHENG L, et al. Modelling nonlinearity of guided ultrasonic waves in fatigued materials using a nonlinear local interaction simulation approach and a spring model[J]. *Ultrasonics*, 2018, **84**: 272-289.
- [19] DIXON S, EDWARDS R S, JIAN X. Inspection of rail track head surfaces using electromagnetic acoustic transducers (EMATs)[J]. *Insight*, 2004, **46**(6): 326-330.
- [20] 谷音, 刘晶波, 杜义欣. 三维一致粘弹性人工边界及等效粘弹性边界单元[J]. *工程力学*, 2007, **24**(12): 31-37.
GU Yin, LIU Jingbo, DU Yixin. 3D consistent viscous-spring artificial boundary and viscous-spring boundary element[J]. *Engineering Mechanics*, 2007, **24**(12): 31-37.