

引用格式: 虞飞, 宋俊, 余赞, 等. 基于模型稀疏表示的单快拍波达方向鲁棒估计[J]. 声学技术, 2020, 39(5): 627-631. [YU Fei, SONG Jun, YU Yun, et al. Robust single-snapshot DOA estimation based on sparse representation of array output model[J]. Technical Acoustics, 39(5): 627-631.] DOI: 10.16300/j.cnki.1000-3630.2020.05.017

基于模型稀疏表示的单快拍波达方向鲁棒估计

虞 飞, 宋 俊, 余 赞, 庞岩泽

(海军研究院, 北京 100071)

摘要: 基于传感器阵列输出模型的稀疏重构, 研究了利用单快拍数据进行波达方向(Direction of Arrival, DOA)估计的问题。考虑到在实际应用中, 目标信号个数远小于传感器阵元数, 目标信号 DOA 相对于空间来说也是稀疏的, 将传统的传感器阵列输出模型进行稀疏化表示, 得到阵列输出数据的稀疏表示模型, 研究了一种基于 l_1 -范数最小化的单快拍 DOA 估计算法(L1-Min)。该算法将稀疏参数求解问题转化为二阶锥规划(Second-Order Cone Programming, SOCP)问题的一般形式, 并在二阶锥规划的框架下求解, 同时分析了算法中正则化参数的选取依据。L1-Min 算法对小样本、相干多径信号、目标信号角度间隔小等非理想条件都具有较好的鲁棒性。仿真实验验证了算法的有效性。

关键词: 单快拍; 稀疏表示; 相干信号; 波达方向; 二阶锥规划

中图分类号: TN911.7 TP391.1

文献标识码: A

文章编号: 1000-3630(2020)-05-0627-05

Robust single-snapshot DOA estimation based on sparse representation of array output model

YU Fei, SONG Jun, YU Yun, PANG Yanze

(Naval Research Academy, Beijing 100071, China)

Abstract: The issue of single-snapshot direction of arrival (DOA) estimation is researched based on the sparse representation of array output model. In practical application, the number of targets is far less than the number of array elements, and the DOAs of signals are sparse in the space, so the conventional array output model can be reconstructed as a sparse representation model. The the single-snapshot DOA estimation algorithm based on the l_1 -norm minimization (L1-min) is proposed. The algorithm translates the optimization problem of sparse parameters into a second-order cone programming (SOCP) framework. The selection criterion of the regularization parameters in this approach is analyzed. The proposed algorithm shows an improved robustness to limited snapshots, coherent sources, and closely spaced sources. Simulations show the effectiveness of the L1-min algorithm.

Key words: single-snapshot; sparse representation; coherent signals; direction of arrival (DOA); second-order cone programming (SOCP)

0 引言

信号波达方向(Direction of Arrival, DOA)估计作为阵列信号处理中一项极为关键的研究内容, 已在无线电通信、雷达、声呐、导航、地震探测等领域有着广泛的应用^[1]。在实际环境中, 由于多径传播等因素的影响, 相干信号是普遍存在的。对于传统的以多重信号分类(Multiple Signal Classification, MUSIC)^[2]和旋转不变信号参数估计(Estimation of

Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques, ESPRIT)^[3]算法为代表的子空间类 DOA 估计算法, 由于相干信号源的信号子空间秩个数小于信号源数, 导致 DOA 估计的准确度严重下降甚至估计失败。另外, 目标平台(如舰艇、飞机等)在实际工作时经常是快速机动的, 特殊情况下需要做复杂而高速的机动动作。这就要求在采样时间内, 目标信号需持续入射到阵列, 而且入射的信号个数、信号的波达方向不能发生变化。在信号源高速运动、信道快速时变等场合, 我们无法进行足够长时间的采样, 这时只有少数的快拍可以利用, 极端情况下只有一次快拍, 此时, 基于多快拍数据的 DOA 估计算法已经无法适用^[4-5]。

近年来, 基于稀疏表示框架的阵列参数估计方

收稿日期: 2019-07-18; 修回日期: 2019-09-29

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11404406)

作者简介: 虞飞(1987-), 男, 江西九江人, 博士, 研究方向为阵列与水声信号处理等。

通讯作者: 虞飞, E-mail: yufei_nra@163.com, yufei19871128@163.com

法引起了相关学者的广泛关注,并取得了大量高质量的研究成果^[6-11]。这类方法的显著优点是它们在有限采样快拍数据、相干多径信号、阵列模型误差、信号 DOA 角度间隔小等非理想条件下,都具有很好的鲁棒性。考虑到在实际应用中,目标信号个数远小于传感器阵元数,目标信号 DOA 相对于空间来说也是稀疏的,本文将传统的传感器阵列输出模型进行稀疏化表示,得到阵列输出数据的稀疏表示模型,研究了一种基于 l_1 -范数最小化的单快拍 DOA 估计算法(简称 L1-min 算法)。该算法将稀疏参数求解问题转化为二阶锥规划(Second-Order Cone Programming, SOCP)问题的一般形式,并在二阶锥规划的框架下求解^[12],同时探讨了算法中正则化参数的选取依据。L1-min 算法在小样本、相干多径信号、目标信号角度间隔小等非理想条件下具有很好的估计性能。

1 阵列输出模型

考虑 K 个远场窄带信号入射到由 M 个无方向性(全向)阵元构成的均匀线性阵列(Uniform Linear Array, ULA),并假设 K 个信号与 ULA 在同一平面内(在实际应用场景中,如水下声呐基阵测向,我们经常只关心某一平面内信号的入射方位,或者入射信号在该平面内的投影,因此,这一假设可以得到保证^[13])。将阵元由 1 到 M 进行编号,并以阵元 1 作为基准或参考阵元。设参考阵元处的任一接收信号变换到基带后有如下形式^[14]:

$$s(t) = a(t) e^{j(\omega_0 t + \varphi(t))} \quad (1)$$

式中, $a(t)$ 为复包络慢变幅度调制函数,可表示为 $a(t) = \sqrt{P_s} \sigma_s(t)$, 其中, P_s 为参考阵元处接收信号的功率, $\sigma_s(t)$ 为零均值单位方差复高斯随机过程,用于描述信号幅度的慢变特征; $\varphi(t)$ 为慢变相位调制函数,可表示为在 $[0, 2\pi]$ 之间均匀分布的随机过程; $\omega_0 = 2\pi f_0$ 为接收信号的中心频率。

那么,在 t 时刻,整个阵列的 $M \times 1$ 维输出数据模型为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (2)$$

式中, $\mathbf{s}(t) = [s_1(t) \cdots s_K(t)]^T$ 为变换到基带后的参考阵元处接收到的 K 个信号构成的列向量, $\mathbf{n}(t) = [n_1(t), \cdots, n_M(t)]^T$ 为阵列的零均值加性复高斯白噪声向量, $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1) \cdots \mathbf{a}(\theta_K)]$ 为 $M \times K$ 维导向矢量矩阵,且对于 ULA, 导向矢量 $\mathbf{a}(\theta_k)$ 可定义为^[15]

$$\mathbf{a}(\theta_k) = \begin{bmatrix} 1 & e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta_k} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} (M-1) d \sin \theta_k} \end{bmatrix}^T \quad (3)$$

式中, d 为相邻阵元间距, λ 为信号波长, θ_k 为第 k 个信号的波达方向(DOA),通常定义为该信号入射方向与 ULA 法线方向的夹角,则有 $\theta_k \in [-\pi/2, \pi/2]$ 。

2 模型的稀疏表示与稀疏矩阵方程的求解

将目标信号可能来向的角度范围 Θ 进行 N 次均匀网格划分 $\{\bar{\theta}_1, \cdots, \bar{\theta}_N\}$, 假设网格划分的密度足够大,以至于目标信号真实的波达方向 θ_k 始终可以落在其中的某一网格上或者与其中的某一网格十分接近,则式(2)可转化为如下的稀疏表示模型

$$\mathbf{x}(t) = \Phi \boldsymbol{\gamma}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (4)$$

式中, $\Phi = [\mathbf{a}(\bar{\theta}_1) \cdots \mathbf{a}(\bar{\theta}_N)]$ 为 $M \times N$ 维稀疏基矩阵,一般有 $M \ll N$, 其中, $\mathbf{a}(\bar{\theta}_n)$ 表示第 n 个网格对应的 $M \times 1$ 维导向矢量。 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ 为 $N \times 1$ 维稀疏信号矢量,理想情况下, $\boldsymbol{\gamma}(t)$ 中只有 K 个非零元素,即为信号 $\{s_k(t)\}_{k=1}^K$, 其中 $s_k(t)$ 在 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ 中的位置与目标信号真实的波达方向 θ_k 在网格中的位置下标是一一对应的。在实际应用中,虽然有噪声的影响,但是这种一一对应关系仍能保持。

一旦求出了 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ 的最稀疏解 $\hat{\boldsymbol{\gamma}}(t)$, 则 $\hat{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ 的归一化稀疏谱的 K 个谱峰对齐的角度网格就是目标信号 DOA 估计值 $\{\hat{\theta}_k\}_{k=1}^K$ 。求解 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ 的最稀疏解本质上是一个求欠定方程(4)的最小 l_0 -范数解的问题

$$\min \|\boldsymbol{\gamma}(t)\|_0, \text{ s.t. } \|\mathbf{x}(t) - \Phi \boldsymbol{\gamma}(t)\|_2 \leq \beta \quad (5)$$

式中, l_0 -范数 $\|\boldsymbol{\gamma}(t)\|_0$ 表示向量 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ 中非零元素的个数,正则化参数 β 用来指定允许的噪声水平。

直接求解优化问题式(5), 必须筛选出向量 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ 中所有可能的非零元素,由于搜索空间过于庞大,故此方法是非确定性多项式时间(Non-deterministic Polynomial-time, NP)困难的。

考虑到 l_1 -范数是最接近于 l_0 -范数的凸目标函数,目前,使用最广泛的求解方法是将 l_0 -范数最小化问题(5)转化为凸松弛的 l_1 -范数最小化问题(简称 L1-min 算法),即:

$$\min \|\boldsymbol{\gamma}(t)\|_1, \text{ s.t. } \|\mathbf{x}(t) - \Phi \boldsymbol{\gamma}(t)\|_2 \leq \beta \quad (6)$$

式中, $\|\cdot\|_1$ 表示向量的 l_1 -范数。该式可以很容易转化为二阶锥规划(SOCP)问题的一般形式,从而在二阶锥规划的框架下求解。

首先,将 l_1 -范数最小化问题(6)转化为标准 SOCP 问题形式。

(1) $\min \|\boldsymbol{\gamma}(t)\|_1$ 可以转化为如下 SOCP 形式:

$$\min \sum_{i=1}^N \delta_i, \text{ s.t. } \begin{bmatrix} \mathbf{e}_i & \mathbf{0}_{1 \times N} \\ \mathbf{0}_{1 \times N} & \mathbf{e}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Re}[\boldsymbol{\gamma}] \\ \text{Im}[\boldsymbol{\gamma}] \end{bmatrix} \leq \delta_i, \quad i=1, \dots, N \quad (7)$$

式中, \mathbf{e}_i 为 $N \times N$ 维单位阵 \mathbf{I} 的第 i 行构成的一个 $1 \times N$ 维行向量, $\text{Re}[\cdot]$ 和 $\text{Im}[\cdot]$ 分别表示取实部和取虚部。

证明: 因为

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{I}\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_N \end{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}$$

所以, $\min \|\boldsymbol{\gamma}(t)\|_1$ 可转化为

$$\min \sum_{i=1}^N |\mathbf{e}_i \boldsymbol{\gamma}| \quad (8)$$

也即

$$\min \sum_{i=1}^N \delta_i, \text{ s.t. } |\mathbf{e}_i \boldsymbol{\gamma}| \leq \delta_i, \quad i=1, \dots, N \quad (9)$$

又因为

$$|\mathbf{e}_i \boldsymbol{\gamma}| = |(\text{Re}[\mathbf{e}_i] + j \text{Im}[\mathbf{e}_i])(\text{Re}[\boldsymbol{\gamma}] + j \text{Im}[\boldsymbol{\gamma}])| = \begin{bmatrix} \text{Re}[\mathbf{e}_i] & -\text{Im}[\mathbf{e}_i] \\ \text{Im}[\mathbf{e}_i] & \text{Re}[\mathbf{e}_i] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Re}[\boldsymbol{\gamma}] \\ \text{Im}[\boldsymbol{\gamma}] \end{bmatrix}, \quad i=1, \dots, N$$

所以, 结论(1)得证。

(2) $\|\mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\gamma}(t)\|_2 \leq \beta$ 同理可转化为如下 SOCP 问题形式:

$$\begin{bmatrix} \text{Re}[-\boldsymbol{\Phi}] & -\text{Im}[-\boldsymbol{\Phi}] \\ \text{Im}[-\boldsymbol{\Phi}] & \text{Re}[-\boldsymbol{\Phi}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Re}[\boldsymbol{\gamma}] \\ \text{Im}[\boldsymbol{\gamma}] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Re}[\mathbf{x}(t)] \\ \text{Im}[\mathbf{x}(t)] \end{bmatrix} \leq \beta \quad (10)$$

由(1)、(2), 则式(6)中的原 l_1 -范数最小化问题转化为如下形式的标准 SOCP 问题:

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^N \delta_i \\ \text{s.t. } \begin{bmatrix} \mathbf{e}_i & \mathbf{0}_{1 \times N} \\ \mathbf{0}_{1 \times N} & \mathbf{e}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Re}[\boldsymbol{\gamma}] \\ \text{Im}[\boldsymbol{\gamma}] \end{bmatrix} \leq \delta_i, \quad i=1, \dots, N \\ \begin{bmatrix} \text{Re}[-\boldsymbol{\Phi}] & -\text{Im}[-\boldsymbol{\Phi}] \\ \text{Im}[-\boldsymbol{\Phi}] & \text{Re}[-\boldsymbol{\Phi}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Re}[\boldsymbol{\gamma}] \\ \text{Im}[\boldsymbol{\gamma}] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Re}[\mathbf{x}(t)] \\ \text{Im}[\mathbf{x}(t)] \end{bmatrix} \leq \beta \end{cases} \quad (11)$$

最后, 定义参数向量 $\boldsymbol{\delta} = [\delta_1 \dots \delta_N]^T$ 和目标变量

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta} \\ \text{Re}[\boldsymbol{\gamma}] \\ \text{Im}[\boldsymbol{\gamma}] \end{bmatrix}, \text{ 则通过对式(11)的形式做进一步转化,}$$

可直接调用 SeDuMi 工具箱^[16]求解上述 SOCP 问题, 得到目标变量的最优解 \mathbf{y}_{opt} , 则 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ 的最稀疏解为 $\hat{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \text{Re}[\boldsymbol{\gamma}_{\text{opt}}] + j \text{Im}[\boldsymbol{\gamma}_{\text{opt}}]$ 。

需要指出的是, 正则化参数 β 的选择是否合适直接关系到最终的稀疏恢复性能, 然而在很多情况下对正则化参数的准确选择是很困难的, 尤其在对噪声统计特性一无所知的情况下。一般情况下,

L1-min 算法正则化参数的选择依据是: 选择正则化参数 β , 使得 $\|\mathbf{n}(t)\| \geq \beta$ 以一个较小的概率成立, 从而使残留量 $\|\mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\gamma}(t)\|$ 与噪声范数的期望 $E[\|\mathbf{n}(t)\|]$ 尽量匹配。对于 $M \times 1$ 维独立同分布的均值为 0, 方差为 σ 的加性复高斯白噪声矢量 $\mathbf{n}(t)$, $\|\mathbf{n}(t)\|^2 / \sigma$ 服从自由度为 $2M$ 的 χ^2 分布, 即 $\|\mathbf{n}(t)\|^2 / \sigma \sim \chi^2(2M)$ 。引入参数 ε , 使得 $\|\mathbf{n}(t)\|^2 / \sigma \leq \varepsilon$ 以一个较高的概率 $1-p$ 成立, 其中 p 是一个较小值, 一般可令 $p=0.001$, 从而确定 ε 的取值, 此时该不等式成立的概率为 0.999, 近似为必然发生事件, 则选择正则化参数 $\beta = \sqrt{\sigma\varepsilon}$ 。

3 仿真实验

在以下仿真实验中, 考虑由 12 个阵元构成的均匀线性传感器阵列, 相邻两个阵元间距为信号波长的一半, 即 $d = \lambda/2$ 。假设两个单位功率的窄带信号分别从不同方向入射到上述传感器阵列, 实验中取阵列对信号的单快拍采样数据。信噪比(Signal to Noise Ratio, SNR)定义为: $R_{\text{SN}} = 10 \lg(P_s / P_n)$, 其中 P_n 为噪声的平均功率。下列实验中, 取 $R_{\text{SN}} = 15 \text{ dB}$ 。

3.1 两个独立信号情形

考虑两个独立信号分别以 DOA 参数 $\theta_1 = -10^\circ$, $\theta_2 = 60^\circ$ 入射到上述均匀线阵, 图 1 给出了基于 L1-min 算法和常规波束形成算法(Conventional Beamforming, CBF)得到的归一化空间功率谱图。图 2 给出了两个独立信号分别以 DOA 参数 $\theta_1 = -10^\circ$, $\theta_2 = -5^\circ$ 入射到上述均匀线阵时, 基于以上两种算法得出的归一化空间功率谱图。

由图 1 的仿真曲线可以看出, 当目标信号的角度间隔较大时, 采用 L1-min 算法和 CBF 算法均可以在真实的目标方向上形成谱峰。而且, 本文算法

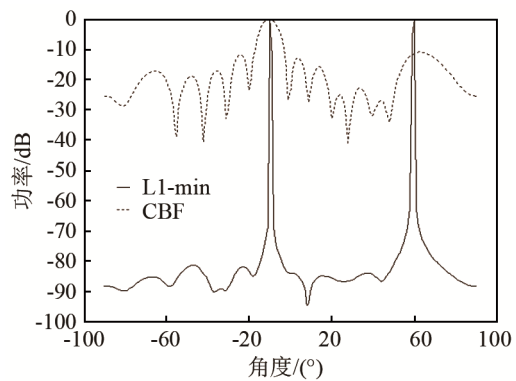


图 1 角度间隔较大的两个独立信号 DOA 估计的归一化空间功率谱

Fig.1 Normalized spatial power spectrum for DOA estimation of two independent signals with large angular spacing

的谱峰比 CBF 算法更加尖锐,更加对准目标真实方向,旁瓣比 CBF 算法的旁瓣也低得多。由图 2 的仿真结果可发现,当目标信号的角度间隔较小时,本文提出的 L1-min 算法仍能在真实的目标方向上形成尖锐的谱峰。相反, CBF 算法在两个真实的目标方向上的谱峰合二为一,说明此时 CBF 算法无法分辨两个信号的 DOA。综合图 1 和图 2 可知,对于独立信号的情形, L1-min 算法对目标信号 DOA 估计的精度和分辨率都比 CBF 算法高。

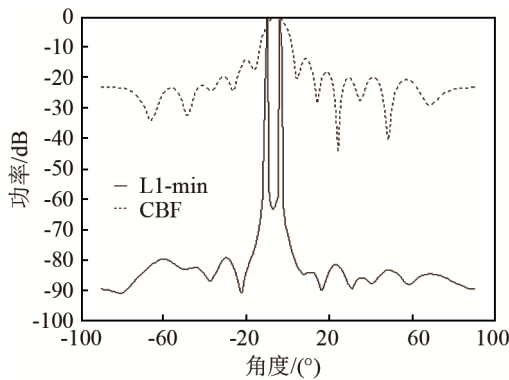


图2 角度间隔较小的两个独立信号 DOA 估计的归一化空间功率谱
Fig.2 Normalized spatial power spectrum for DOA estimation of two adjacent independent signals

3.2 两个相干信号情形

考虑两个相干信号分别以 DOA 参数 $\theta_1=-10^\circ$, $\theta_2=60^\circ$ 入射到上述均匀线阵,图 3 给出了基于 L1-min 算法和常规波束形成算法(Conventional Beamforming, CBF)得到的归一化空间功率谱图。图 4 给出了两个相干信号分别以 DOA 参数 $\theta_1=-10^\circ$, $\theta_2=-5^\circ$ 入射到上述均匀线阵时,基于以上两种算法得出的归一化空间功率谱图。实验中,两个信号之间的相干系数为 $\rho=e^{j\pi/6}$ 。

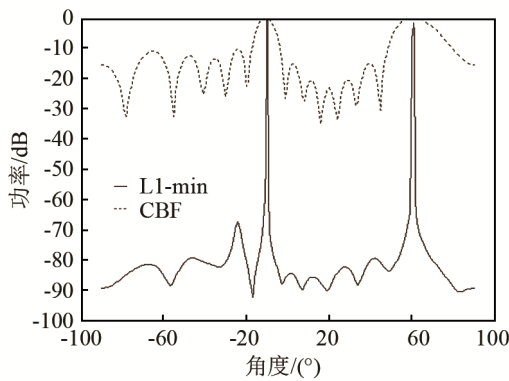


图3 角度间隔较大的两个相干信号 DOA 估计的归一化空间功率谱
Fig.3 Normalized spatial power spectrum for DOA estimation of two coherent signals with large angular spacing

由图 3 的仿真曲线可以看出,当相干信号的角

度间隔较大时,采用 L1-min 算法和 CBF 算法均可以在真实的目标方向上形成谱峰,与图 1 相比发现,两个算法的估计精度和分辨率并没有因为信号相干而有显著下降。但本文算法的谱峰比 CBF 算法更加尖锐,更加对准目标真实方向,旁瓣比 CBF 算法的旁瓣也低得多,而且 CBF 算法旁瓣的高度与主瓣高度相差变小。由图 4 的仿真结果可发现,当相干信号的角度间隔较小时,本文提出的 L1-min 算法仍在真实的目标方向上形成了尖锐的谱峰。相反, CBF 算法在两个真实的目标方向上的谱峰合二为一,说明此时 CBF 算法无法辨别两个信号的 DOA。综合图 3 和图 4 可知,对于相干信号的情形, L1-min 算法对目标信号 DOA 估计的精度和分辨率都比 CBF 算法高。

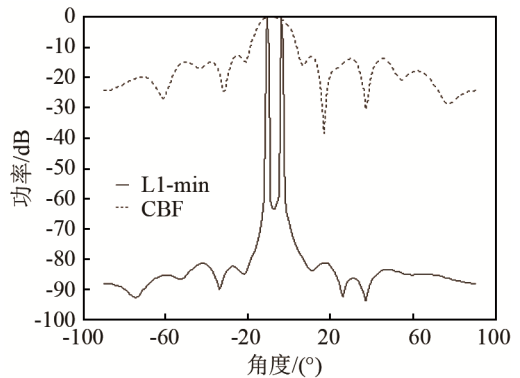


图4 角度间隔较小的两个相干信号 DOA 估计的归一化空间功率谱
Fig.4 Normalized spatial power spectrum for DOA estimation of two adjacent coherent signals

需要说明的是,本仿真实验中的信噪比 SNR 为 15 dB。在低信噪比情况下,无论目标信号之间是否相关,本文算法仍能在真实的目标角度附近形成明显的尖峰。只是随着信噪比的降低,算法对目标信号 DOA 的估计精度会有所下降,归一化稀疏功率谱的旁瓣级有所升高,但并不影响本文算法对 DOA 的整体估计效果。

4 结 论

本文对传统的传感器阵列输出模型进行了稀疏重构,提出了一种凸松弛的 l_1 -范数最小化 DOA 估计算法(L1-min),给出了 l_1 -范数最小化优化问题的详细求解方法,分析了算法中正则化参数的选取依据。仿真结果表明,本文算法在单快拍、相干多径信号、目标信号空间间隔很小等非理想情况下都具有较好的估计精度和分辨率,因而非常适用于快变相干信号 DOA 的实时跟踪估计。本文同时指出,

正则化参数的选取直接关系到最终的稀疏恢复性能，然而在很多情况下，对正则化参数的选择是很困难的，尤其是在对噪声的统计特性一无所知的情况下，这也是 L1-min 算法的局限性所在。事实上，正则化参数对噪声的统计特性和信噪比十分敏感。因此，研究提出一类无需进行正则化参数选取的稀疏参数估计算法是后续值得研究的问题。

参 考 文 献

- [1] KRIM H, VIBERG M. Two decades of array signal processing research: the parametric approach[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 1996, **13**(7): 67-94.
- [2] SCHMIDT R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1986, **34**(3): 276-280.
- [3] ROY R, KAILATH T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1989, **37**(7): 984-995.
- [4] O'BRIEN R T, KIRIAKIDIS K. Single-snapshot robust direction finding[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, **53**(6): 1964-1978.
- [5] ABOUTANIOS E, HASSANIEN A, AMIN M G, et al. Fast iterative interpolated beamforming for accurate single-snapshot DOA estimation[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2017, **14**(4): 574-578.
- [6] MALIOUTOV D, CETIN M, WILLSKY A S. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, **53**(8): 3010-3022.
- [7] YIN J H, CHEN T Q. Direction-of-arrival estimation using a sparse representation of array covariance vectors[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, **59**(9): 4489-4493.
- [8] LIU Z M, HUANG Z T, ZHOU Y Y. Array signal processing via sparsity-inducing representation of the array covariance matrix[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2013, **49**(3): 1710-1724.
- [9] HYDER M M, MAHATA K. Direction-of-arrival estimation using a mixed l2,0 norm approximation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, **58**(9): 4646-4655.
- [10] WANG B, LIU J J, SUN X Y. Mixed sources localization based on sparse signal reconstruction[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2012, **19**(8): 487-490.
- [11] XU X, WEI X H, YE Z F. DOA Estimation based on sparse signal recovery utilizing weighed l1-norm penalty[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2012, **19**(3): 155-158.
- [12] LOBO M, VANDENBERGHE L, BOYD S, et al. Applications of second-order cone programming[J]. *Linear Algebra Its Applicat., Special Issue on Linear Algebra in Control, Signals, and Image Processing*, 1998, **284**(1-3): 193-228.
- [13] 孙超. 水下多传感器阵列信号处理[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2007: 118-130.
SUN Chao. Underwater multi-sensor array signal processing[M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 2007: 118-130.
- [14] 张小飞, 陈华伟, 仇小锋, 等. 阵列信号处理及 MATLAB 实现[M]. 北京: 电子工业出版社, 2015: 34-36.
ZHANG Xiaofei, CHEN Huawei, QIU Xiaofeng, et al. Array signal processing and its implementation with MATLAB[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2015: 34-36.
- [15] 闫锋刚, 沈毅, 刘帅, 等. 高效超分辨波达方向估计算法研究[J]. *系统工程与电子技术*, 2015, **37**(7): 1465-1475.
YAN Fenggang, SHEN Yi, LIU Shuai, et al. Overview of efficient algorithm for super-resolution DOA estimates[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2015, **37**(7): 1465-1475.
- [16] STURM J F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones[J]. *Optimization Methods Software*, 1999, **11**(1-4): 625-653.