引用格式：刘建波, 韩树平, 徐景峰, 等. 一种信标水声定位的改进扩展卡尔曼滤波算法[J]. 声学技术, 2020, **39**(6): 752-757. [LIU Jianbo, HAN Shuping, XU Jingfeng, et al. An improved EKF positioning algorithm for underwater acoustic beacon[J]. Technical Acoustics, **39**(6): 752-757.] **DOI**: 10.16300/j.cnki.1000-3630.2020.06.016

一种信标水声定位的改进扩展卡尔曼滤波算法

刘建波，韩树平，徐景峰，杨 刚
(海军潜艇学院，山东青岛 266000)

摘要：水声测距误差通常偏离高斯分布，纯距离扩展卡尔曼滤波(Extended Kalman Filter, EKF)定位跟踪算法误差较大。在将测距噪声分为高斯分量和非高斯缓变分量的基础上，提出了一种改进的扩展卡尔曼滤波 EKF 算法(Improved Extended Kalman Filter, IEKF)和初值选取方法。利用仿真实验和湖试对 IEKF 算法进行了验证，结果表明 IEKF 算法能够对测距偏差进行跟踪补偿，定位精度明显优于常规 EKF 算法。

关键词：水声定位；测距误差；改进扩展卡尔曼滤波；初值选取
中图分类号：TB533 **文献标识码**：A **文章编号**：1000-3630(2020)-06-0752-06

An improved EKF positioning algorithm for underwater acoustic beacon

LIU Jianbo, HAN Shuping, XU Jingfeng, YANG Gang
(*Navy Submarine Academy*, *Qingdao* 266000, *Shandong*, *China*)

Abstract: Underwater acoustic ranging error usually deviated from Gaussian distribution, which brings about low-precision for the extended Kalman filter (EKF) tracking in range-only positioning and navigation. Assuming that the ranging deviation comprises Gaussian and non-Gaussian deviation, an improved EKF (IEKF) algorithm and initial position determining method are put forward. Simulation and lake trial are conducted, and the results show that IEKF could achieve better precision compared to conventional EKF.

Key words: underwater acoustic positioning; ranging deviation; improved extended Kalman filter (IEKF); initial position determining

0 引 言

信标利用水声信号对水下航行器提供导航定位服务，主要利用的是距离和方位信息。关于水声纯距离定位导航方面有较多的研究[1-4]；文献[5]将水声通信与定位导航结合，利用单程传播时延实现距离估算和定位导航。水声测距误差受多种因素影响，一般并不满足高斯噪声假设，文献[6]分析了影响水声测距系统误差的各种因素，文献[7-8]提出了基于色噪声条件下的改进卡尔曼滤波方法；文献[9-10]等提出了基于乘性噪声条件下的滤波定位算法；文献[11-12]等讨论了迭代初值对滤波的影响，提出了迭代初值的选取办法。

针对水声测距时噪声模型失配的问题，本文提出了一种缓变测距偏差模型，将测距噪声分为高斯分量和缓变非高斯分量，当两次观测间隔较小时，假定缓变非高斯分量不变。基于此，提出一种改进的扩展卡尔曼滤波(Improved Extended Kalman Filter, IEKF)算法，研究了 IEKF 算法的初值选取方法。仿真实验和湖试结果表明，IEKF 算法能够对测距偏差进行跟踪补偿，在复杂噪声条件下定位精度明显优于常规扩展卡尔曼滤波(Extended Kalman Filter, EKF)算法。

收稿日期：2020-09-30；**修回日期**：2020-10-23
作者简介：刘建波(1986－)，男，河南南阳，博士研究生，研究方向为水声信号处理。
通讯作者：韩树平，E-mail: sphan@163.com

1 基于缓变测距偏差的改进 EKF

1.1 基于缓变测距偏差的改进 EKF(IEKF)算法

水下纯距离导航定位时，水声测距误差与多种因素相关。利用传播时延进行距离估计，距离误差 $\mathrm{d}r/r=\mathrm{d}t/t+\mathrm{d}c/c$，时延测量误差 $\mathrm{d}t$ 与信号带宽和信噪比有关，与距离无关，在远距离测量时对测距误差影响较小。声速误差与实际水文环境有密切关系，即使利用声速剖面对有效声速进行修正，海底地形失配以及洋流等因素也会导致有效声速在不同方向和距离上的变化，增大声速误差。在收发双

方距离较远时，声速在水平方向上也有可能发生较大变化，增大声速误差。一般来说，水声测距误差与距离成正比，距离越远，误差越大，但是在不同方向上，受洋流、地形等环境影响，声速误差规律可能存在不同。

假设测距噪声 ξ_k 由两部分组成：$\xi_k=\eta_k+\upsilon_k$，其中 η_k 是零均值高斯噪声，υ_k 是缓变的测距偏差，由于实际物理环境具有连续性，当前后两次观测时间间隔较短、距离较近时，认为 υ_k 的变化较小，$\upsilon_k=\upsilon_{k-1}$。

根据以上假设，对 EKF 算法进行改进，将状态向量进行扩展如下：$\boldsymbol{X_k}=[x_k\ \ y_k\ \ \upsilon_k]^{\mathrm{T}}$，并将状态方程和观测方程修改为[13]

$$\begin{cases}\boldsymbol{X_k}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X_{k-1}}+\boldsymbol{u_k}+\boldsymbol{\omega_k}\\ r_k=\sqrt{x_k^{\ 2}+y_k^{\ 2}}+\upsilon_k+\eta_k\end{cases}\tag{1}$$

根据测距偏差 $\upsilon_k=\upsilon_{k-1}$ 的假设，式中状态转移矩阵 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}\{[1\,1\,1]^{\mathrm{T}}\}$，位移控制量为 $\boldsymbol{u_k}=[\Delta x_k\ \Delta y_k\ 0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\omega_k}$ 为状态噪声，$\boldsymbol{\omega_k}$ 与 $\boldsymbol{\eta_k}$ 的协方差矩阵分别为 $\boldsymbol{Q_k}$ 和 $\boldsymbol{R_k}$，观测方程的雅可比矩阵为 $\boldsymbol{H_k}=\dfrac{\partial r_k}{\partial \boldsymbol{X_k}}=\begin{bmatrix}\dfrac{x_k}{r_k} & \dfrac{y_k}{r_k} & 1\end{bmatrix}$，则基于缓变测距偏差的 IEKF 递推算法为[13]

$$\begin{cases}\boldsymbol{X_{k,k-1}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X_{k-1,k-1}}+\boldsymbol{u_k}\\ \boldsymbol{P_{k,k-1}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P_{k-1,k-1}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Q_k}\\ \boldsymbol{S}=\boldsymbol{H_k}\boldsymbol{P_{k,k-1}}\boldsymbol{H_k}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{R_k}\\ \boldsymbol{K}=\boldsymbol{P_{k,k-1}}\boldsymbol{H_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{-1}\\ \boldsymbol{X_{k,k}}=\boldsymbol{X_{k,k-1}}+\boldsymbol{K}\left(r_k-\sqrt{x_{k,k-1}^{\ 2}+y_{k,k-1}^{\ 2}}-\upsilon_{k,k-1}\right)\\ \boldsymbol{P_{k,k}}=\boldsymbol{P_{k,k-1}}-\boldsymbol{K}\boldsymbol{H_k}\boldsymbol{P_{k,k-1}}\end{cases}\tag{2}$$

状态向量先验协方差阵 $\boldsymbol{P}$ 可初始化为单位阵。状态噪声协方差阵 $\boldsymbol{Q_k}=\mathrm{diag}\left\{\left[\sigma_x^2\ \ \sigma_y^2\ \ \sigma_\upsilon^2\right]\right\}$，其中 σ_x^2 与 σ_y^2 主要取决于控制输入量 $\boldsymbol{u_k}$ 的精度，水下平台一般采用航迹推算(Dead Reckoning, DR)或惯性导航系统(Inertial Navigation System, INS)获取 $\boldsymbol{u_k}$，σ_x^2 与 σ_y^2 可根据经验确定；对于 σ_υ^2，在两次观测间隔距离较近时，υ_k的噪声主要由状态误差 σ_x^2 与 σ_y^2 引起，$\sigma_\upsilon^2=\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2\right)/2$，当两次观测间隔较大时，可以适当增大 σ_υ^2。

1.2　改进 EKF 滤波的初值确定方法

一般而言，二维纯距离定位跟踪系统满足可观测性条件[14-15]，但是机动路线和迭代初值等因素对解算收敛速度和精度有较大影响。IEKF 算法与经典 EKF 算法相比，已知信息量不变，而扩展了状态向量，增加了未知信息 υ_k，对算法收敛性能有不利影响，仿真显示，IEKF 算法对初值比较敏感。当初值误差较小时，跟踪性能较好，系统很快进入稳定跟踪状态，当选取的初值误差较大时，跟踪性能较差，需要经过长时间的震荡才能趋于稳定。

为了减小初值对 IEKF 跟踪性能的影响，在进入迭代跟踪之前，不仅需要对目标进行预定位，而且需要对预定位结果进行评估，确保预定位结果具有足够的精度，才能使后续滤波尽快收敛。

利用最小二乘等算法可以实现预定位，设预定位状态向量为 $[x_k\ \ y_k]^{\mathrm{T}}$，平台真实状态为 $[x\ \ y\ \ \upsilon]^{\mathrm{T}}$，预定位误差为

$$\Delta\boldsymbol{X}=[\Delta x\ \ \Delta y\ \ \upsilon]^{\mathrm{T}}=[x\ \ y\ \ \upsilon]^{\mathrm{T}}-[x_k\ \ y_k\ \ 0]^{\mathrm{T}}\tag{3}$$

由于测距偏差 υ_k 的存在，前述估计结果仍有可能存在较大偏差，为了进一步提高预定位精度，并定量分析预定位误差的大小，对观测方程进行线性化近似，假设测距偏差在预定位期间不变，观测方程可表示为

$$r_k=\sqrt{(x_k-\Delta x)^2+(y_k-\Delta y)^2}+\upsilon+\eta_k\tag{4}$$

其中：$\eta_k\sim N\left(0,\sigma^2\right)$。

设水下平台与浮标的距离较远，$\mathrm{d}r/r\ll 1$，将式(4)泰勒展开并保留一阶项可得：

$$Y_k=\Delta\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X_k}+\eta_k\tag{5}$$

式中：Y_k 与 $\boldsymbol{X_k}$ 分别为

$$\begin{cases}Y_k=\sqrt{x_k^{\ 2}+y_k^{\ 2}}-r_k\\ \boldsymbol{X_k}=\left[\dfrac{x_k}{\sqrt{x_k^{\ 2}+y_k^{\ 2}}}\ \ \dfrac{y_k}{\sqrt{x_k^{\ 2}+y_k^{\ 2}}}\ \ 1\right]^{\mathrm{T}}\end{cases}\tag{6}$$

假设从观测伊始至完成预定位共获得 k 组观测数据 $r_i,i=1,2,\cdots k$，利用 $[x_k\ \ y_k]^{\mathrm{T}}$ 反推平台历史位置 $[x_i\ \ y_i]^{\mathrm{T}}$，获得如下线性回归方程：

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\eta}\tag{7}$$

其中：$\boldsymbol{Y}=[\boldsymbol{Y}_1\ \ \boldsymbol{Y}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{Y}_k]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{X}_1\ \ \boldsymbol{X}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{X}_k]^{\mathrm{T}}$，$\eta\sim N\left(0,\sigma^2\right)$，$\boldsymbol{X_i}$、$\boldsymbol{Y_i}$ 与 $[x_i\ \ y_i]^{\mathrm{T}}$ 以及 r_i 的关系与式(6)形式相同。设式(7)中的线性回归方程的最小二乘解为

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{k}}=\left[\hat{\beta}_{1k}\ \ \hat{\beta}_{2k}\ \ \hat{\beta}_{3k}\right]^{\mathrm{T}}\tag{8}$$

根据解的性质可知：$\Delta\boldsymbol{X}=\mathrm{E}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{k}}\right)$。

以 $\hat{\beta}_{3k}$ 作为预定位时的测距偏差 υ 的估计值，则预定位状态向量可表示为

$$\hat{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{k}}=\left[x_k+\hat{\beta}_{1k}\ \ y_k+\hat{\beta}_{2k}\ \ \hat{\beta}_{3k}\right]^{\mathrm{T}}\tag{9}$$

预定位均方误差可表示为

$$e_k=\mathrm{tr}\left[\mathrm{Var}\left(\hat{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{k}}\right)\right]=\mathrm{tr}\left[\mathrm{Var}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{k}}\right)\right]\tag{10}$$

式中，Var(·) 表示求向量的协方差。根据文献[16]中定理，预定位均方误差可表示为

$$\mathrm{tr}\left[\mathrm{Var}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{k}}\right)\right]=\mathrm{tr}\left[\sigma^2\left(\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}\right)^{-}\right]=\sigma^2\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\lambda_i}\tag{11}$$

其中：λ_1，λ_2，λ_3 是矩阵 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$ 的特征值，$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 > 0$。定义 $\alpha = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\lambda_i}$ 为预定位精度因子，则预定位均方误差为 $e_k = \alpha\sigma^2$。

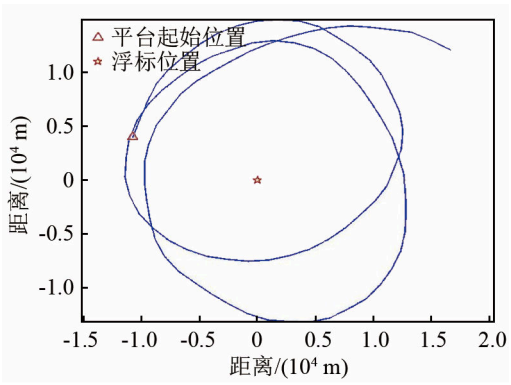
当 $\alpha \gg 1$ 时，预定位结果误差较大，不足以采信，当 $\alpha \approx 1$ 时，预定位误差与测距噪声误差相近，可以作为后续滤波的初值。

2 仿真实验与湖试结果分析

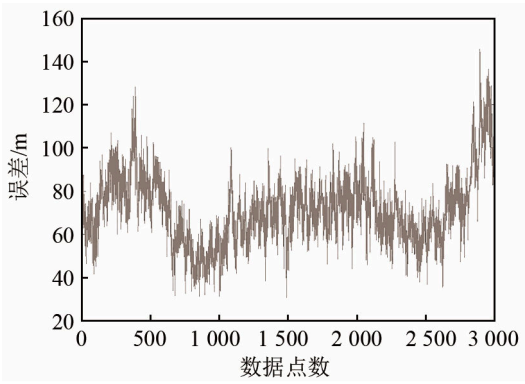
2.1 仿真结果与分析

仿真实验中，水下平台绕浮标运动，每隔一定时间向靠近浮标的方向转向一次，转向角度随机，水下平台一个典型的轨迹如图 1(a)所示。测距误差 ξ_k 由高斯白噪声 η_k 和缓变测距偏差 υ_k 组成。其中 $E(\eta_k)$ 的均值为 0、方差为 5 m。υ_k 分为两部分，一是声速误差引起的与距离成正比的乘性偏差 γr_k，γ 为声速误差，一般不超过 1%；二是缓变随机偏差 $\mu_k + \rho$，μ_k 为零均值随机偏差，可以通过低通滤波器对高斯白噪声滤波进行模拟，ρ 为随机偏差的均值，仿真测距误差如图 1(b)所示。

预定位精度因子 α 随观测数据点数的变化如图 2 所示。



(a) 水下平台航迹



(b) 测距误差

图 1 水下平台航迹与测距误差

Fig.1 Track and ranging error of underwater platform

在图 1 所示轨迹下，预定位精度因子随观测点数据的增加迅速下降，在获得约 200 组数据后降为 1，此时平台相对浮标的方位变化约 90°。

图 3 显示了初值偏差对常规 EKF 与 IEKF 定位跟踪的影响，图 3(a)迭代初值与真值的距离误差为 150 m，图 3(b)迭代初值与真值的距离误差为 30 m。结果显示，对于传统 EKF 算法，定位误差约 100 m，受迭代初值误差影响较小。对于 IEKF 算法，当初值误差 150 m 时，1 000 组数据后定位误差约 40 m，测距偏差跟踪结果震荡，2 000 组数据后渐趋稳定，当初值误差 30 m 时，800 组数据后定位跟踪误差收敛至 20 m，测距偏差跟踪稳定。

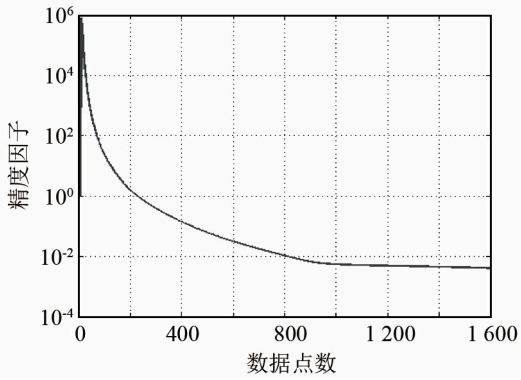
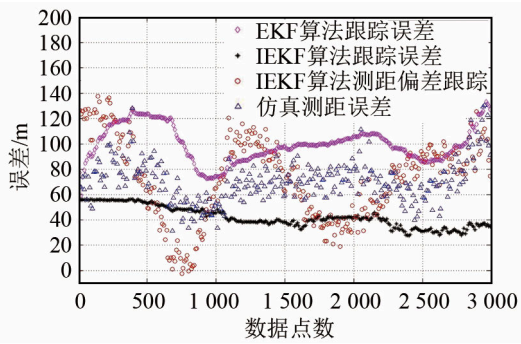
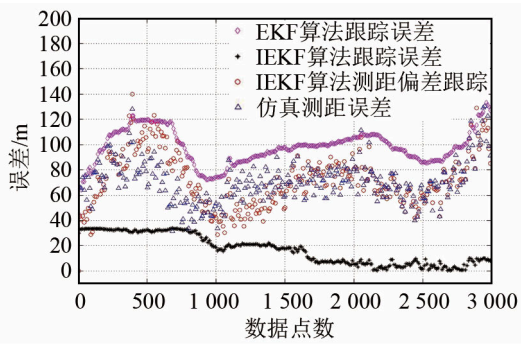


图 2 预设定位精度随观测数据的变化关系

Fig.2 Variation of pre-positioning precision with observed data points



(a) 迭代与真值距离初值误差 150 m 时跟踪误差



(b) 迭代初值与真值距离误差 30 m 时跟踪误差

图 3 预设定位精度对跟踪算法的影响

Fig.3 The influence of the pre-positioning precision on tracking algorithm

图 4 显示了经过预定位后的跟踪结果，在预定位精度因子 α 低于 2 时进行预定位。结果显示，利用 350 组数据完成预定位后，定位精度约 20 m，测距偏差跟踪稳定。与图 3 相比可以看出，在缺乏精确的位置先验信息时，预定位可以使跟踪过程更快收敛。

图 5 显示了基于缓变测距偏差的 IEKF 算法和基于乘性噪声的 EKF 算法[10]结果对比，可以看出两者定位误差约 20 m，与常规 EKF 算法相比具有更高的精度。

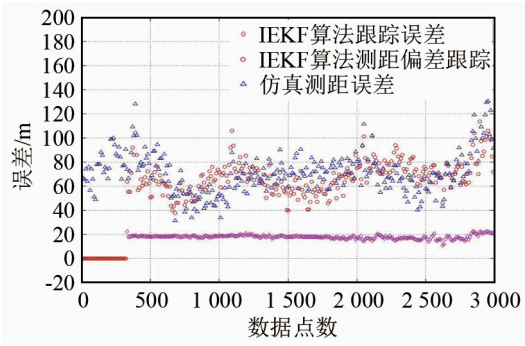


图 4　预设定位处理后的 IEKF 算法的跟踪结果
Fig.4　The IEKF tracking result after pre-positioning processing

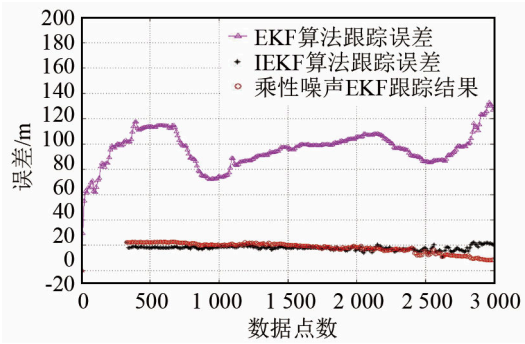


图 5　基于乘性噪声的 EKF 算法和基于缓变测距偏差的 IEKF 算法的跟踪结果对比
Fig.5　Comparison of tracking results between the multiplicative noise based EKF and the slow variable ranging deviation based IEKF results

为了比较 IEKF 算法和基于乘性噪声的 EKF 算法的计算结果，在测距误差 ξ_k 总方差固定的条件下，为乘性偏差 γr_k 和随机偏差 μ_k 分配不同比例的方差，比较两种算法稳定跟踪性能，不同条件下 300 次蒙特卡洛仿真结果如图 6 所示。当噪声总方差固定时，IEKF 算法性能比较稳定，与 γr_k 和 μ_k 的相对大小基本无关，而基于乘性噪声的 EKF 算法性能与 γr_k 和 μ_k 的相对大小有关，随机偏差 μ_k 方差在 ξ_k 总方差中占比小于 25%时，基于乘性噪声的 EKF 算法表现优于 IEKF 算法，反之则 IEKF 算法性能更优。注意 γr_k 方差与声速误差 γ 和距离 r_k 的变化有关。在距离变化较小、能够获取实时声速剖面、对声线弯曲进行精确补偿的条件下，乘性偏差 γr_k 较小，受海底地形、洋流等环境因素影响的随机偏差 μ_k 较大，IEKF 算法具有更好的性能。

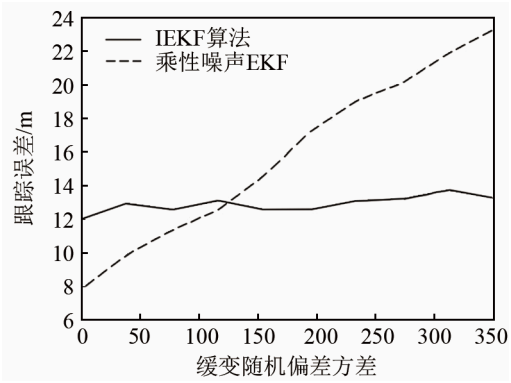


图 6　噪声总方差恒定时两种算法跟踪性能对比
Fig.6　Comparison of tracking performance of the two algorithms for a certain total variance of noise

2.2　湖试结果与分析

为了检验 IEKF 算法的有效性，利用 2018 年某水域进行的测距定位试验数据对算法进行了验证，分别利用 EKF 算法、IEKF 算法和乘性噪声 EKF 算法进行定位。试验中用两条船分别搭载水声信号发送和接收系统，并实时记录收发船只全球卫星导航系统(Global Navigation Satellite System, GNSS)位置。试验中，发射系统将自身 GNSS 数据利用水声扩频通信方法发送至接收系统。接收系统利用自身 GNSS 数据推算自身位移，模拟 DR 或 INS 系统的位移控制量 $\boldsymbol{u}_{kr}$，利用发射系统 GNSS 数据推算发射系统位移信息 $\boldsymbol{u}_{ks}$，整个系统可等效为固定浮标和移动平台的定位跟踪问题，位移控制输入量 $\boldsymbol{u}_k=\boldsymbol{u}_{kr}-\boldsymbol{u}_{ks}$。

图 7 显示了试验期间收发船只位置和相对态势。受试验场地和条件所限，试验期间，信号发射系统在四个方位上各发射一组信号，没有进行长时间连续机动发射，其中第 1、2 组相对方位约 50°，

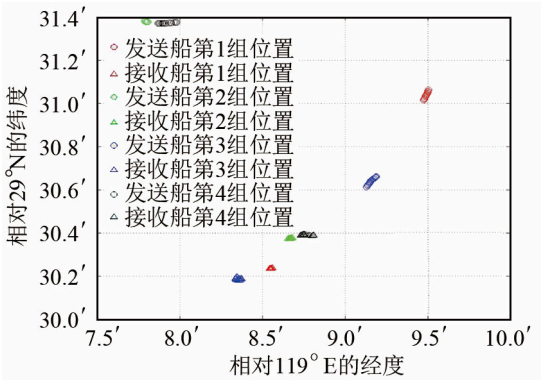
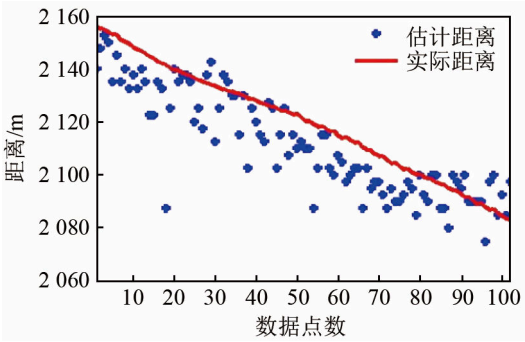


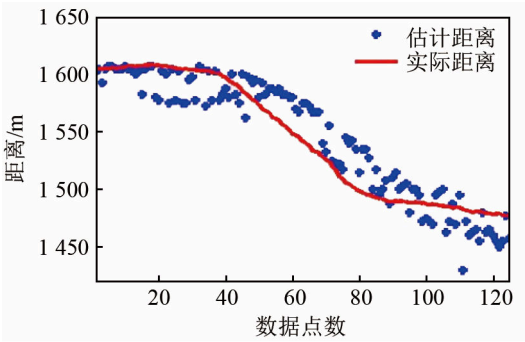
图 7　收发船只的全球卫星导航系统(GNSS)相对位置
Fig.7　GNSS relative positions of transmitting and receiving boats

第 3、4 组相对方位约 320°，方位差约 90°。

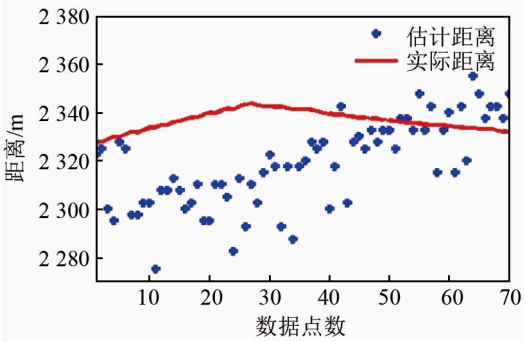
图 8 显示了 4 组信号的 GNSS 距离和水声测距结果。各组数据收发距离相近，测距噪声各不相同，与距离的关系较小。



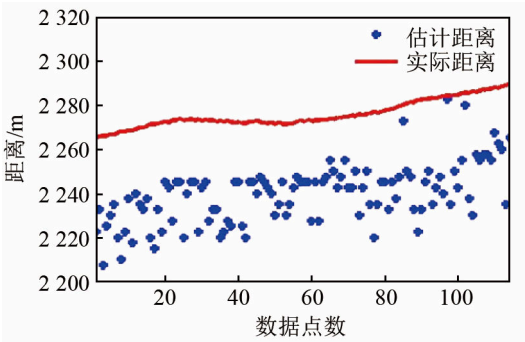
(a) 第 1 组数据



(b) 第 2 组数据



(c) 第 3 组数据



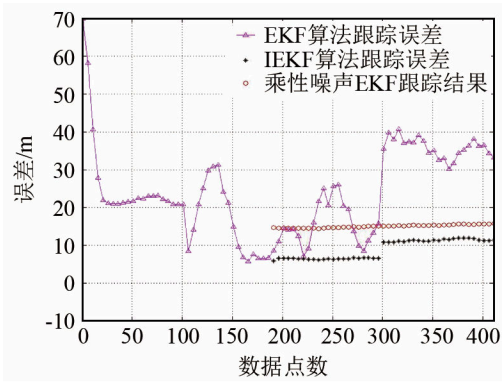
(d) 第 1 组数据

图 8 收发船只实际距离与估测距离

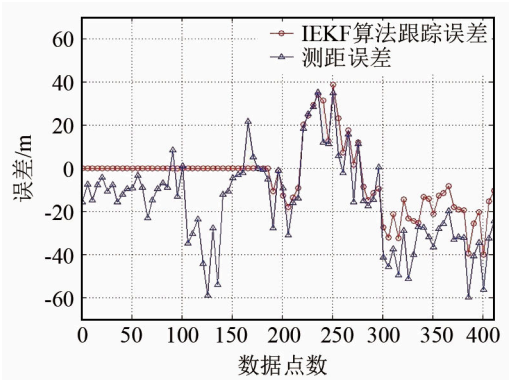
Fig.8 The actual and estimated distances between the transmitting and receiving boats

试验数据处理结果如图 9 所示。图 9(a)显示了不同算法定位结果，图 9(b)显示了 IEKF 算法估算的 υ_k 与实际测距误差的对比。

从图 9 可以看出，IEKF 算法经过预定位后，定位误差约 10 m，EKF 算法定位误差收测距噪声影响，在 10～40 m 范围内波动，IEKF 算法性能明显优于 EKF 算法，能够较好地跟踪和补偿测距缓变偏差。



(a) 两种算法的定位结果



(b) IEKF 估算误差与实际测距误差

图 9 湖试数据处理结果

Fig.9 The processing results of lake trial data

3 结 论

本文提出了一种基于缓变测距偏差的改进 EKF(IEKF)算法，将水声测距误差分为缓变偏差和零均值高斯噪声两部分，并通过对缓变偏差的跟踪与补偿，减小测距噪声模型失配对 EKF 的影响。仿真实验和湖试结果表明，本文提出的迭代初值选取方法能够使 IEKF 算法实现对缓变测距偏差的跟踪补偿，当缓变随机偏差在总方差中的占比较大时，性能优于基于乘性噪声的 EKF 算法。

参 考 文 献

[1] WANG X B, FU M Y, ZHANG H S. Target tracking in wireless sensor nnetworks based on the combination of KF and MLE using

distance measurements[J]. IEEE Transactions on Mobile Computing, 2012, **11**(4): 567-576.

[2] SLIWKA J, CLEMENT B, PROBST I. Sea glider guidance around a circle using distance measurements to a drifting acoustic source[C]//IEEE/RSJ International Conference on Inteligent Robots and Systems. October 7-12 2012, 94-99.

[3] DUBROVIN F S, SCHERBATYUK A F. Studying some algorithms for AUV navigation using a single beacon: the results of simulation and sea trials[J]. Gyroscopy ans Navigation, 2016, **7**(2): 189-196.

[4] 曹俊, 郑翠娥, 孙大军, 等. 系数矩阵正定的单信标测距定位算法[J]. 电子与信息学报, 2017, **39**(4): 981-988.
CAO Jun, ZHENG Cui'e, SUN Dajun, et al. A single beacon location algorithm with positive definite coefficient matrix[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2017, **39**(4): 981-988.

[5] WEBSTER S E. Decentralized single-beacon acoustic navigation: combined communication and navigation for underwater vehicles [D]. Washington D.C.: The John Hopkins University, 2010, 6-22.

[6] 曹俊, 郑翠娥, 孙大军, 等. 水下载体的声学定位系统测距误差[J]. 南京大学学报(自然科学), 2016, **52**(5): 816-824.
CAO Jun, ZHENG Cui'e, SUN Dajun, et al. Ranging error analysis of acoustic positioning system for underwater vehicle[J]. Journal of Nanjing University(Natural Sciences), 2016, **52**(5): 816-824.

[7] 林旭, 刘俊钊. 有色噪声下的目标跟踪卡尔曼滤波新算法[J]. 中国惯性技术学报, 2018, **26**(6): 830-834.
LIN Xu, LIU Junzhao. New Kalman filtering algorithm for target tracking with colored noise[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2018, **26**(6): 830-834.

[8] 郑晓飞, 郭创, 等. 有色量测声下的HCKF及其应用[J]. 计算机工程与应用, 2017, **53**(14): 263-270.
ZHENG Xiaofei, GUO Chuang, et al. Hign-degree cubature Kalman filter with colored measurement noise and its application[J]. Computer Engineering and Application, 2017, **53**(14): 263-270.

[9] 史秀纺. 复杂因素影响下的定位跟踪问题[D]. 杭州: 浙江大学, 2016.

[10] 朱子尧, 韩树平, 郭正东, 等. 乘性噪声背景下基于非线性渐消滤波的单信标测距定位算法[J]. 电子与信息学报, 2019, **41**(1): 165-171.
ZHU Ziyao, HAN Shuping, GUO Zhengdong, et al. Single beacon location algorithm based on nonlinear fading filter under multiplicative noise background[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2019, **41**(1): 165-171.

[11] 洪腾腾, 胡绍林. 初值偏差对线性系统状态向量 Kalman 滤波的影响[J]. 自动化学报, 2017, **43**(5): 789-794.
HONG Tengteng, HU Shaolin. Effect of initial deviation on Kalman filter of state vectors in linear system[J]. Acta Automatica Sinica, 2017, **43**(5): 789-794.

[12] 张延顺, 郭雅静, 黄小娟, 等. 水下运载器航位推算系统初始位置确定方法[J]. 北京航空航天大学学报, 2015, **41**(12): 2212-2216.
ZHANG Yanshun, GUO Jingya, HUANG Xiaojuan, et al. Method of determining initial position of dead reckoning system of underwater vehicle[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2015, **41**(12): 2212-2216.

[13] Mohinder S. Grewal, Angus P. Andrews. Kalman Filtering- Theory and Practice Using Matlab. Fourth Edition[M]. 北京: 电子工业出版社, 2017.

[14] SONG T L. Observability of target tracking with range-only measurements[J]. IEEE Journal of Oceanic Engineering, 1999, **24**(3), 383-387.

[15] 刘明雍, 李闻白, 刘富樯, 等. 基于单信标的水下导航系统可观性分析[J]. 西北工业大学学报, 2011, **29**(1): 87-92
LIU Mingyong, LI Wenbai, LIU Fuqiang, et al. Observability analysis for underwater navigation system based on range measurements with a single beacon[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2011, **29**(1): 87-92.

[16] 陈乃辉. 统计回归分析-回归方程引论第一版[M]. 北京: 科学出版社, 2012: 130-137.