

引用格式: 李亚, 张楠. 平面波激励矩形板辐射声计算中奇异积分处理方法研究[J]. 声学技术, 2021, 40(2): 151-156. [LI Ya, ZHANG Nan. Research on singular integral method in the calculation of plane wave excited rectangular plate radiation sound wave[J]. Technical Acoustics, 2021, 40(2): 151-156.] DOI: 10.16300/j.cnki.1000-3630.2021.02.001

平面波激励矩形板辐射声计算中奇异积分 处理方法研究

李 亚¹, 张 楠²

(1. 中国船舶科学研究中心船舶振动噪声重点实验室, 江苏无锡 214082; 2. 中国船舶科学研究中心水动力学重点实验室, 江苏无锡 214082)

摘要: 平面波垂直入射均匀薄板为一常见的透声问题; 如果从振动声辐射角度来讲, 这也是一个平面波激励板振动的声辐射问题, 两种分析思路均已有了经典方法可以采用, 计算结果也理应一致。前者计算容易, 但后者由于积分中含有奇点所以计算比较复杂。文章首先对有限薄板被激振动和声辐射的已有研究结果进行了回顾, 重点处理了矩阵求解和奇点积分问题, 给出了求解奇点积分的具体方法, 对奇点的影响进行了分析, 最后编写程序进行计算。计算结果表明, 基于简正模态的计算方法在给定算例下的结果与理论分析结果接近。这表明基于振动模态分析的方法是可行的。此方法技术难度较大, 但其可用于研究简支薄板的声场结构, 以及曲面结构声辐射等复杂问题的求解。

关键词: 平面波; 矩形板; 奇点积分; 辐射声

中图分类号: U661.14

文献标志码: A

文章编号: 1000-3630(2021)-02-0151-06

Research on singular integral method in the calculation of plane wave excited rectangular plate radiation sound wave

LI Ya¹, ZHANG Nan²

(1. National Key Laboratory on Ship Vibration and Noise, China Ship Scientific Research Center, Wuxi 214082, Jiangsu, China;

2. National Key Laboratory of Hydrodynamics, China Ship Scientific Research Center, Wuxi 214082, Jiangsu, China)

Abstract: The vertical incidence of a plane wave into a uniform thin plate is a common problem of sound transmission. From the viewpoint of vibration and sound radiation, it is also a problem of sound radiation from plate vibration excited by plane wave. Both of them can be analyzed by classical methods, and the calculation results should be consistent. The former is easy to calculate, but the latter is more complex due to the singularity in the integral. Firstly, the existing research results of the excited vibration and acoustic radiation of the finite thin plate are reviewed, and the matrix solution and singular integral problems are focused and solved in detail. Then, the specific method of solving singular integral is given, and the influence of singularity is analyzed. Finally, the corresponding program is prepared for computation, and it can be seen that the calculation results based on normal modes are in good agreement with the ideal results. It shows that the method based on vibration modal analysis is feasible. The implementation of this method is very difficult, but it can be used to study the sound field around simply supported thin plate and solve the sound radiation problem of curved surface structure.

Key words: plane wave; rectangular plate; singular integral; radiated sound

0 引 言

声波透过均匀介质的现象在生活中比较普遍, 对于无限延伸的介质, 经典声学教材往往直接假定介质中的波是平面波, 在界面处速度与压力连续, 从而可以得到透声量。实际情况下, 介质往往是有

限的, 而且存在边界上的限制。对于平面波激励矩形板的辐射声计算, 在文献[1]中已有较为详细的分析: 平面波激励矩形板时由于边界阻抗突变, 板内波在边界处反射, 因而在板中形成驻波, 驻波振幅具有一定形式的分布, 利用模态的正交性, 可以得到板在介质中的振动方程, 然后使用瑞利公式进行辐射声计算。

在文献[1]中求矩阵元素时出现了带奇点的四重积分。对于这一问题, 在文献[2]中采用了变量替换与积分区域变换的办法, 将四重积分变为两重积分, 变换过程较为复杂, 未专门分析奇点积分的求

收稿日期: 2020-01-16; 修回日期: 2020-04-09

作者简介: 李亚(1979—), 男, 江苏徐州人, 博士, 高级工程师, 研究方向为推进器噪声。

通信作者: 李亚, E-mail: 694339492@qq.com

解方法。同样在文献[3]中,也采用了变量替换与积分区域变换方法,亦没有专门分析奇点的处理方法。对于一重积分可以使用LOBATTO法则计算^[4],以避免被积函数的奇异性。对于二重带奇点积分一般是以奇点为圆心作一个小圆,来研究当圆半径逼近0时的结果^[5-6],这些多用于理论分析。本文采用理论推导,给出了求解奇点积分的具体办法,然后再用数值求解。对于矩阵求解,将在正文中看到,里面出现了两个相加符号,需要巧妙设计形成矩阵再进行求解。

文献[1]中还细致介绍了带周期栅的膜振动及其声场、周期性支撑固定的薄板振动和声散射、带周期性加强肋的薄板振动和声辐射,这些内容由简到繁地涵盖了工程中常见的典型情况。应该说在2001年左右,平面波激励矩形板的辐射声理论研究已经达到一个顶峰。因此近年来,对于平面波激励矩形板的辐射声理论分析的研究并不多见,主要集中在复杂板的隔声问题^[7-8]、辐射声特性^[10-11]、辐射效率^[12-14]、板的优化设计方面^[15]。

另外,采用声学有限元、声学边界元也可以研究矩形板的辐射声。Suzuki等^[16]将有限元、边界元两种方法耦合,即将声腔用边界元离散,将结构用有限元离散,计算了声波经由弹性单层板向声腔透射的传声损失。Wu等^[17]用边界元法(Boundary Element Method, BEM)对薄壳结构内外声场进行了分析,对结构用有限元法(Finite Element Method, FEM)分析,建立复杂结构的内、外声场和结构耦合振动方程,分析了声波通过薄壁壳体的声传输问题。Coyette^[18]基于有限元和边界元耦合方法,计算弹性和多孔材料结构的表面阻抗和传声损失。Ding等^[19]计算了声源和结构载荷共同激励下弹性薄壁腔体的声振耦合特性。对于复杂情况、单一工况问题有限元或边界元法能够很好地解决,但难以发现机理与影响规律,在设计中还要从模态分析入手,以达到工程要求。

平面波激励矩形板的辐射声是很基础的问题,但由于是一个声固耦合的问题,因此这个几何形式简单的问题并不是看起来那样简单,仍有很多机理有待深入研究与挖掘,在声学领域中具有独特的研究价值。这方面研究的进步,也会给其他研究带来启发,因此有很大的研究意义。

1 基本理论公式推导

矩形板由于入射波的作用,会引起板振动,于是向两边介质中辐射声波,同时板面也受到两面介

质对板面的反作用力,所以这是一个声固耦合的复杂问题。

当板较大时,可以近似用声波穿过无限延伸媒质上的透声理论进行计算。本节首先回顾一下透声理论,然后重点推导平面波激励矩形板的辐射声理论公式。

声波通过中间层的示意图如图1所示,透射波(p_t, v_t)通过无限大中间层的声压之比^[20] t_p 为

$$t_p = \frac{p_{ta}}{p_{ia}} = \frac{2}{[4 \cos^2 k_2 D + (R_{12} + R_{21})^2 \sin^2 k_2 D]^{\frac{1}{2}}} \quad (1)$$

其中: p_{ta} 为介质III中的透射波声压幅值, p_{ia} 为入射波声压幅值; $R_{12} = \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1}$, $R_{21} = \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2}$, ρ_1 、 ρ_2 为媒质 I、II 的密度; c_1 、 c_2 为媒质 I、II 中的声速; $k_2 = \frac{\omega}{c_2}$, ω 为角频率。

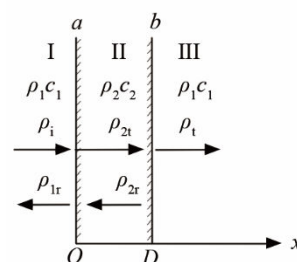


图1 平面波激励矩形板辐射声波的示意图
Fig.1 Schematic diagram of soundwaves from a rectangular plate excited by plane waves

平面波激励矩形板的辐射声示意图如图2所示,其中板厚 h 的值较小,属于薄板。 xOz 平面位于板的下表面。矩形板 x 方向长为 l_1 , y 方向长为 l_2 。当声波的波向量在沿 xOz 平面内与 Oz 轴交角为 θ 方向入射,则在 $z < 0$ 半空间内除了刚硬板面入射波和无限大刚板反射波之外,还应加上有限板在声波作用下进行振动时再辐射的声波。在 $z > h$ 半空间只存在再辐射声波,于是在板面上下介质中的声关系如下面第2节中的公式。

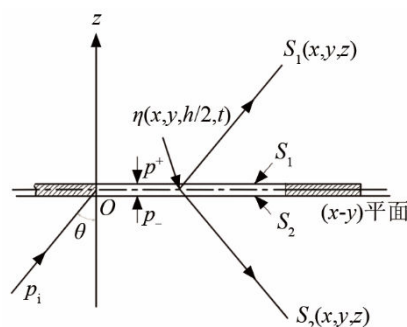


图2 平面入射波的传播示意图
Fig.2 Schematic diagram of plane incident wave propagation

入射波声压 $p_i(x, y, z, t) = p_a e^{j(\omega t - kx)}$, 为简化推导, 令声压幅值 p_a 为 1, 经过一系列推导可以得到^[1]:

$$Z_p^{pq}(\omega) A_{pq} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Z_{mn}^{pq}(\omega) A_{mn} = F^{pq}, \quad p=1, 2, \dots, \infty, \quad q=1, 2, \dots, \infty \quad (2)$$

其中:

$$\begin{cases} Z_p^{pq}(\omega) = R_p^{pq} + jX_p^{pq} \\ R_p^{pq} = \mu_{pq}^4 \frac{D'}{\omega}, X_p^{pq} = \sigma \omega [1 - (\frac{\omega_{pq}}{\omega})^2] \\ A_{mn} = j\omega B_{mn} \end{cases} \quad (3)$$

$$F^{pq} = \frac{8}{l_1 l_2} \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} e^{jkx_1 \sin \theta} W_{pq}(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} Z_{11}^{11} & \dots & Z_{1l}^{11} & Z_{21}^{11} & \dots & Z_{2l}^{11} & \dots & Z_{ul}^{11} & \dots & Z_{uu}^{11} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{11}^{1U} & \dots & Z_{1l}^{1U} & Z_{21}^{1U} & \dots & Z_{2l}^{1U} & \dots & Z_{ul}^{1U} & \dots & Z_{uu}^{1U} \\ Z_{11}^{21} & \dots & Z_{1l}^{21} & Z_{21}^{21} & \dots & Z_{2l}^{21} & \dots & Z_{ul}^{21} & \dots & Z_{uu}^{21} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{11}^{2U} & \dots & Z_{1l}^{2U} & Z_{21}^{2U} & \dots & Z_{2l}^{2U} & \dots & Z_{ul}^{2U} & \dots & Z_{uu}^{2U} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{11}^{U1} & \dots & Z_{1l}^{U1} & Z_{21}^{U1} & \dots & Z_{2l}^{U1} & \dots & Z_{ul}^{U1} & \dots & Z_{uu}^{U1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{11}^{UU} & \dots & Z_{1l}^{UU} & Z_{21}^{UU} & \dots & Z_{2l}^{UU} & \dots & Z_{ul}^{UU} & \dots & Z_{uu}^{UU} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} \\ \vdots \\ A_{1l} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{2l} \\ \vdots \\ A_{ul} \\ \vdots \\ A_{uu} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z_{11}^{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ & Z_p^{1U} & & \vdots \\ & Z_p^{21} & \ddots & \vdots \\ & & Z_p^{2U} & \ddots & \vdots \\ & & & Z_p^{U1} & \ddots & \vdots \\ & & & & Z_p^{UU} & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & & 0 & Z_p^{UU} & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} \\ \vdots \\ A_{1l} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{2l} \\ \vdots \\ A_{ul} \\ \vdots \\ A_{uu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^{11} \\ \vdots \\ F^{1U} \\ F^{21} \\ \vdots \\ F^{2U} \\ \vdots \\ F^{U1} \\ \vdots \\ F^{UU} \end{pmatrix} \quad (6)$$

从式(6)可以看出最左侧的 $Z_{U^2 \times U^2}$ 矩阵分别由元素 Z_{mn}^{pq} 组成, 加号后的 $Z_{P \times U^2 \times U^2}$ 矩阵分别由元素 Z_p^{pq} 组成; $A_{U^2 \times 1}$ 由元素 A_{mn} 组成; 等号右侧 $F_{U^2 \times 1}$ 是由 F^{pq} 元素组成。可以先求出 $A_{U^2 \times 1}$, 然后再变换后得到 A_{mn} 。

式(6)可写成矩阵形式:

$$(Z_{U^2 \times U^2} + Z_{P \times U^2 \times U^2}) A_{U^2 \times 1} = F_{U^2 \times 1} \quad (7)$$

1.2 辐射声求解

由式(7)求逆得到 A

$$A_{U^2 \times 1} = (Z_{U^2 \times U^2} + Z_{P \times U^2 \times U^2})^{-1} F_{U^2 \times 1} \quad (8)$$

由于薄板位移可表达为 $H(x, y, z, t) = \eta(x, y) e^{j\omega t}$, 从而:

$$\frac{\partial H(x, y, t)}{\partial t} = j\omega \eta(x, y) e^{j\omega t} = \sum_{m,n} A_{mn} W_{mn}(x_1, y_1) e^{j\omega t} \quad (9)$$

根据式(9), 可得到 $\eta(x_1, y_1) = \frac{1}{j\omega} \sum_{m,n} A_{mn} W_{mn}(x_1, y_1)$ 。

将 A 代入即可得到各点处的位移幅值。则辐射声场 $p_{sl}(x, y, z, t)$ ((x, y, z) 为 $z > 0$ 空间任意一点) 可表示为

$$p_{sl}(x, y, z, t) = -\frac{\rho \omega^2}{2\pi} \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} \eta(x_1, y_1) \cdot \frac{e^{-jk[(x_1-x)^2 + (y_1-y)^2 + z^2]^{1/2}}}{[(x_1-x)^2 + (y_1-y)^2 + z^2]^{1/2}} dx_1 dy_1 \cdot e^{j\omega t} \quad (10)$$

$$Z_{mn}^{pq}(\omega) = j \frac{4k\rho c}{\pi l_1 l_2} \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} W_{pq}(x_1, y_1) W_{mn}(x'_1, y'_1) \cdot \frac{e^{-jk[(x'_1-x_1)^2 + (y'_1-y_1)^2]^{1/2}}}{[(x'_1-x_1)^2 + (y'_1-y_1)^2]^{1/2}} dx'_1 dy'_1 \quad (5)$$

其中: μ_{mn} 是对应于本征函数 $W_{mn}(x_1, y_1)$ 的本征值, 它们决定于板的边界条件; μ 为泊松比; E 为杨氏模量; D' 为损耗因子; ρ 为介质密度。令 (x_1, y_1) 为矩形板表面上的点坐标, (x'_1, y'_1) 是面上积分的动点坐标, η 为板表面位移幅值。 B_{mn} 为有阻尼情况下的振动位移幅值展开项的系数。

1.1 矩阵求解

式(5)中有两个求和符号, 需用下方矩阵形式进行展开:

由于整个过程是采用复数计算的, 所以 $p_{sl}(x, y, h, t)$ 为复数, 取其幅值作为平板的辐射声, 由于入射波的声压幅值设为 1, 此结果即为透声量。

2 计算对象与计算方法

2.1 计算模型

计算对象为一薄钢板, 长度为 4 m, 宽度为 4 m, 厚度为 0.001 m, 放置方向如图 2 所示, 其中四边简支, 钢板四周为无限大障板。钢的弹性模量 216 GPa, 密度为 7 800 kg·m⁻³, 体纵波声速为 6 100 m·s⁻¹^[19], 泊松比为 0.28。空气的参数: 密度为 1.21 kg·m⁻³, 声速为 344 m·s⁻¹。声波频率为 261.6 Hz(音名 c1), 如果频率太高, 则计算阶数增加, 太小则考虑到近场效应平板面积要增大, 这样积分时区间划分个数又增加, 因此定为这一频率。

2.2 平面波通过矩形板的理论解

将 2.1 节中参数代入式(1)中, 可以得到透声值为 0.0648, 这个值为无限大板的透声结果。由于板较大, 可以近似作为平面波通过矩形板的辐射声。

2.3 平面波激励矩形板辐射的数值解

2.3.1 奇点处理

$Z_{U^2 \times U^2}$ 中的元素可表示为

$$Z_{mn}^{pq}(\omega) = j \frac{4k\rho c}{\pi l_1 l_2} \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} W_{pq}(x_1, y_1) W_{mn}(x'_1, y'_1) \cdot \frac{e^{-jk[(x'_1-x_1)^2+(y'_1-y_1)^2]^{1/2}}}{[(x'_1-x_1)^2+(y'_1-y_1)^2]^{1/2}} dx_1 dy_1 dx'_1 dy'_1 =$$

$$j \frac{4k\rho c}{\pi l_1 l_2} \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} \left[\int_0^{l_2} \int_0^{l_1} W_{mn}(x'_1, y'_1) \cdot \frac{e^{-jk[(x'_1-x_1)^2+(y'_1-y_1)^2]^{1/2}}}{[(x'_1-x_1)^2+(y'_1-y_1)^2]^{1/2}} dx'_1 dy'_1 \right] \cdot W_{pq}(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \quad (11)$$

重点处理方括号中的积分，在积分中 (x'_1, y'_1) 与 (x_1, y_1) 重合时，出现了奇点，为解决这一问题，建立如图 3 所示的局部坐标系，其中 S_ε 为奇点 q_0 附近的半径为 ε 的圆。

$$\int_0^{l_2} \int_0^{l_1} W_{mn}(x'_1, y'_1) \frac{e^{-jk[(x'_1-x_1)^2+(y'_1-y_1)^2]^{1/2}}}{[(x'_1-x_1)^2+(y'_1-y_1)^2]^{1/2}} dx'_1 dy'_1 =$$

$$\iint_{S_\varepsilon} W_{mn}(x'_1, y'_1) \frac{e^{-jk[(x'_1-x_1)^2+(y'_1-y_1)^2]^{1/2}}}{[(x'_1-x_1)^2+(y'_1-y_1)^2]^{1/2}} dx'_1 dy'_1 +$$

$$\iint_{S-S_\varepsilon} W_{mn}(x'_1, y'_1) \frac{e^{-jk[(x'_1-x_1)^2+(y'_1-y_1)^2]^{1/2}}}{[(x'_1-x_1)^2+(y'_1-y_1)^2]^{1/2}} dx'_1 dy'_1 \quad (12)$$

在 $S-S_\varepsilon$ 上无奇异性，计算是没有困难的。在 S_ε 上可表示为

$$\iint_{S_\varepsilon} W_{mn}(x'_1, y'_1) \frac{e^{-jk[(x'_1-x_1)^2+(y'_1-y_1)^2]^{1/2}}}{[(x'_1-x_1)^2+(y'_1-y_1)^2]^{1/2}} dx'_1 dy'_1 \approx$$

$$W_{mn}(x_1, y_1) \iint_{S_\varepsilon} \frac{e^{-jkR_1}}{R_1} dx dy =$$

$$W_{mn}(x_1, y_1) \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\varepsilon \frac{e^{-jk\rho}}{\rho} \rho d\rho =$$

$$W_{mn}(x_1, y_1) \cdot 2\pi \frac{j(e^{-jk\varepsilon}-1)}{k} \quad (13)$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时，式(13)结果为 0， $S-S_\varepsilon$ 上的极限值就是整个 S 上的积分结果(这一做法即为“无界函数的反常重积分”^[21])。对于 $S-S_\varepsilon$ 部分的计算，无法求出被积函数的原函数，只能采用数值办法求解；当 ε 取很小的值时，分母趋于 0，这一部分会导致计算结果动荡，如图 4 所示。因此 ε 要选择一个合适的值，这将在本节末讨论。

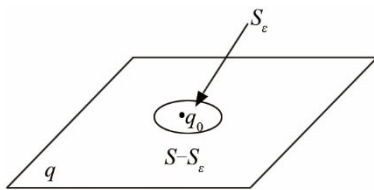


图 3 奇点计算示意图
Fig.3 Singularity computation diagram

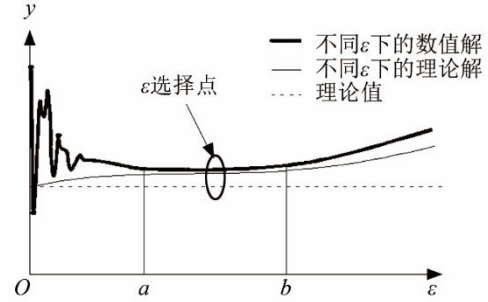


图 4 不同 ε 时解的变化情况
Fig.4 Solution variation with different ε

另外，在编程求积分时，采用矩形以便于计算，这样 π 变为 4，积分最终表达为

$$Z_{mn}^{pq}(\omega) = j \frac{4k\rho c}{\pi l_1 l_2} \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} W_{pq}(x_1, y_1) W_{mn}(x'_1, y'_1) \cdot \frac{e^{-jk[(x'_1-x_1)^2+(y'_1-y_1)^2]^{1/2}}}{[(x'_1-x_1)^2+(y'_1-y_1)^2]^{1/2}} dx_1 dy_1 dx'_1 dy'_1 = j \frac{4k\rho c}{\pi l_1 l_2} \int_0^{l_2} \int_0^{l_1}$$

$$\left[\int_0^{l_2} \int_0^{l_1} W_{mn}(x'_1, y'_1) \frac{e^{-jk[(x'_1-x_1)^2+(y'_1-y_1)^2]^{1/2}}}{[(x'_1-x_1)^2+(y'_1-y_1)^2]^{1/2}} dx'_1 dy'_1 \right] \cdot W_{pq}(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \approx j \frac{4k\rho c}{\pi l_1 l_2} \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} \left[W_{mn}(x_1, y_1) \cdot 2\pi \frac{j(e^{-jk\varepsilon}-1)}{k} + \right.$$

$$\left. \iint_{S-S_\varepsilon} W_{mn}(x'_1, y'_1) \frac{e^{-jk[(x'_1-x_1)^2+(y'_1-y_1)^2]^{1/2}}}{[(x'_1-x_1)^2+(y'_1-y_1)^2]^{1/2}} dx'_1 dy'_1 \right] \cdot W_{pq}(x_1, y_1) \cdot$$

$$dx_1 dy_1 \approx j \frac{4k\rho c}{\pi l_1 l_2} \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} \left[W_{mn}(x_1, y_1) \cdot 8 \frac{j(e^{-jk(L/2)}-1)}{k} + \right.$$

$$\left. \iint_{S-S_L} W_{mn}(x'_1, y'_1) \frac{e^{-jk[(x'_1-x_1)^2+(y'_1-y_1)^2]^{1/2}}}{[(x'_1-x_1)^2+(y'_1-y_1)^2]^{1/2}} dx'_1 dy'_1 \right] \cdot W_{pq}(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \quad (14)$$

其中： S_L 为边长为 L 的小正方形。

在具体进行积分时，采用图 5 的示意图。首先根据 (x_1, y_1) 的位置，确定好积分区域。按从上往下的顺序分别考虑 $x_1-L/2 \leq 0$ 、 $x_1-L/2 > 0$ 且 $x_1+L/2 < l_1$ 、 $x_1+L/2 \geq l_1$ 这三种情况，在每种情况下又细分为 $y_1-L/2 \leq 0$ 、 $y_1-L/2 > 0$ 且 $y_1+L/2 < l_2$ 、 $y_1+L/2 \geq l_2$ 的情况。对于正方形位于矩形中间的情况，可分为 I、II、III、IV、V 五个区域，其中 L 为边长(见图 6)。在计算时，分别计算各区域的积分值，然后全部加在一起，其中区域 V 采用方括号中

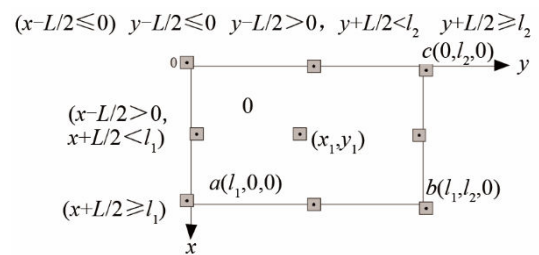
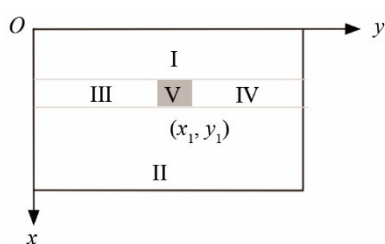
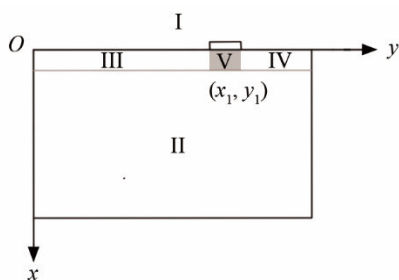


图 5 积分计算示意图
Fig.5 Integral calculation diagram



(a) 正方形位于矩形中间



(b) 正方形位于矩形边线位置

图6 积分计算区域划分示意图

Fig.6 Partition of integral calculation area

的方法计算。对于处于边线位置, 仍然采用同样办法, 只不过区域 I 中积分为 0, 区域 V 中积分只采用有填充部分的面积。

当第 V 部分边长 L 设为 $0.0001 \sim 0.01$ (与厚度同量级), 对于本文中计算对象为长 1 m 、宽 1 m 、厚 0.001 m 的板, 计算结果与采用 Mathematic 的 NIntegrate 命令计算二维积分十分接近。在本文计算中, 选择 $L \leq 0.0005$, 与 MatheMatic 8.0 软件求解精度有 4 位有效数字一致。其在 $L=0.0005$ 时, $2\pi \frac{j(e^{-jk\varepsilon} - 1)}{k} = 0.003141589665 - 3.752743144 \times 10^{-6}j$ (式中 $k = 2\pi \times 261.6/344$), 可见这一部分是很小的。

2.3.2 积分处理

在矩阵求解时多个元素均出现多重积分, 分别采用计算重积分的累次积分法。对于积分函数有振荡的情况, 一般可用复合辛普森法或复合 COTES 方法^[22], 由于这里要考虑计算精度与计算时间, 经比较后每重积分均采用复化柯特斯公式^[23], 公式为

$$C_n = \frac{h}{90} [7f(a) + 32 \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1/4}) + \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1/2}) + 32 \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+3/4}) + 14 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + 7f(b)] \quad (15)$$

由于一般数学软件自带公式无法计算四重积分, 在分析三重积分时, 对于长为 1 m 、宽为 1 m 、厚为 0.001 m 的板, x_1 (下面公式中用 x 表示) 设为 0.62 , 窄边划分区间数为 1, 其他边为 16, 进行三重积分计算。用 Mathematic 软件进行三维验证, 命令为 NIntegrate[Sin[1Pi*z]*Sin[1Pi*w]*E^(-I(2*Pi*261.6

/344*sqrt[(z-x)^2+(w-y)^2])/sqrt[(z-x)^2+(w-y)^2] Sin[3Pi*x]*Sin[3Pi*y], {y,0,1}, {z,0,1}, {w,0,1}]/x->0.62, 结果为 $0.0397207 + 0.0352855j$ 。程序计算结果为 $0.0396100 + 0.0352855j$, 误差不超过 1%。

2.3.3 求逆处理

由于各个元素为复数, 所以矩阵为复矩阵, 复矩阵求逆采用全选主元高斯-约当 (Gauss-Jordan) 法^[23]。

3 计算结果讨论

计算阶数 $m=n=28$, $Z_{U^2 \times U^2}$ 中矩阵元素为 28^4 (614656) 个, 形成的 $(Z_{U^2 \times U^2} + Z_{P U^2 \times U^2})$ 矩阵为 784 阶方阵。区间划分个数 16, 较窄边长为 1 个。其中 $D'=0.1$ (值的选择对结果影响不大)。在 $m=n=28$ 时, 这时对应于 (28, 28) 模态的固有频率为 310.151 Hz , 略大于计算频率。在距离矩形板 6 m 处的平面上布置 25×25 的计算点, 作为辐射声的计算接收点。程序采用 Fortran 语言编写, 采用双精度, 在 Win7 操作系统 (CPU 为 i7-7700) 采用 Intel Visual Fortran 2013 软件计算, 结果如图 7 所示。

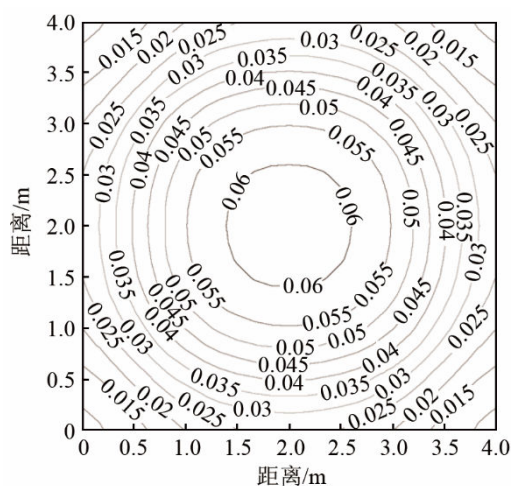


图7 辐射声的值计算结果

Fig.7 Numerical calculation results of radiation sound

由图 7 可以看出, 在正方形中间部分的结果是十分接近理论结果的, 其中心处的值为 0.061462 , 比理论结果 0.0648 (见 2.2 节中) 少 5.2%; 在边线处, 透声值降低。这说明采用这种办法求奇点与求辐射声是可行的。另外, 在试算时, 在 $15 \sim 27$ 阶变化时, 对计算结果基本影响不大。这是因为频率较高时, 振动模态为角模态^[24], 即大部分振动区域的振动辐射声会相互抵消, 角上的振动对辐射声有较大影响。

值得指出的是,在采用瑞利公式计算活塞声源辐射声时,有远场弗朗霍夫(Fraunhofer)区和近场费涅尔(Fresnel)区^[25],已经比较复杂。这里多个振动模态,情况更为复杂。在本文编程计算时发现,当声场位置与平板的距离增大时,中心处与边线处的辐射声结果比较接近,但由于其远场也类似于活塞声源,具有远场特点,其辐射声值有所降低。

本文基于振动模态的计算方法有以下近似,这也是计算的误差来源:薄板厚度忽略不计;理论模型只考虑弯曲波振动辐射声;奇点计算时,在计算公式将推导中的圆区域变为正方形区域,近似认为奇点附近 $W_{mm}(x'_i, y'_i)$ 相等;柯特斯法求积分时区间数不够大;计算阶次选取还可以更高些;阻尼的设置对结果有一些影响;计算采用双精度,虽已很精确,但仍存在误差。

4 结 论

平面波垂直激励矩形板的辐射声,貌似十分简单,但若精确解决却需要很繁难的推导与大计算量的数值计算。

本文细致地推导了平面波激励矩形板的辐射声公式,重点处理了矩阵求解问题、四重带奇点积分,并进行了程序编写,其中四重带奇点积分能够划分成五个区域分别求解来最终获得。针对某一具体算例,求得的结果与无限大板的透射声理论值十分接近。这说明采用模态正交分析是可行的。另外,采用这种办法会准确得到各个位置处的辐射声。这种办法再加以拓展还可以处理曲面辐射声的问题。

参 考 文 献

- [1] 何祚镛. 结构振动与声辐射[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学出版社, 2001.
- [2] 何祚镛. 水声作用下矩形弹性-粘弹性复合板的振动和散射声近场(II): 矩形弹性-粘弹性复合板散射声近场研究[J]. 声学学报, 1986, 11(1): 1-19.
HE Zuoyong. Vibration and near scattering field of immersed rectangular elastic-viscoelastic composite plate in an underwater sound field (II)—scattering field near by composite plate[J]. Acta Acustica, 1986, 11(1): 1-19.
- [3] LI W L, GIBELING H J. Determination of the mutual radiation resistances of a rectangular plate and their impact on the radiated sound power[J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, 229(5): 1213-1233.
- [4] DAVIS P, RABINOWITZ P. Methods of numerical integration[M]. New York: Academic Press, 1975.
- [5] 沈杰罗夫. 水声学波动问题[M]. 何祚镛, 赵晋英, 译. 北京: 国防工业出版社, 1983.
- [6] 戴逸山. 舰船在波浪中运动的频域与时域势流理论[M]. 北京: 国防工业出版社, 1998.
- [7] LEE J H, KIM J. Analysis of sound transmission through periodically stiffened panels by space-harmonic expansion method[J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, 251(2): 349-366.
- [8] 孙曜, 汪鸿振. 双层板声透射性能计算分析[J]. 振动与冲击, 2003, 22(4): 94-96.
SUN Yao, WANG Hongzhen. Performance calculation and analysis of sound transmission for double panel structure[J]. Journal of Vibration and Shock, 2003, 22(4): 94-96.
- [9] 辛锋先, 卢天健, 陈常青. 轻质金属三明治板的隔声性能研究[J]. 声学学报, 2008, 33(4): 340-347.
XIN Fengxian, LU Tianjian, CHEN Changqing. Sound transmission through lightweight metallic sandwich panel with corrugated core[J]. Acta Acustica, 2008, 33(4): 340-347.
- [10] 陈美霞, 罗琦, 魏建辉. 湍流激励下简支平板振动特性的解析法研究[J]. 船舶力学, 2016, 20(4): 487-496.
CHEN Meixia, LUO Qi, WEI Jianhui. Analytical method for calculating the vibration characteristics of simple-supported plate excited by turbulent boundary layer[J]. Journal of Ship Mechanics, 2016, 20(4): 487-496.
- [11] 金叶青, 姚熊亮, 庞福振, 等. 均匀流中剪切变形加筋层合板声与振动特性研究[J]. 物理学报, 2013, 62(13): 335-347.
JIN Yeqing, YAO Xiongliang, PANG Fuzhen, et al. Vibro-acoustic characteristics of shear deformable stiffened laminated panels in mean flow[J]. Acta Physica Sinica, 2013, 62(13): 335-347.
- [12] ANDERSON J S, BRATOSANDERSON M. Radiation efficiency of rectangular orthotropic plates[J]. Acta Acustica United with Acoustica, 2004, 91(1): 61-76.
- [13] XIE G, THOMPSON D J, JONES C J C. The radiation efficiency of baffled plates and strips[J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 280(1-2): 181-209.
- [14] PUTRA A, THOMPSON D J. Sound radiation from rectangular baffled and unbaffled plates[J]. Applied Acoustics, 2010, 71(12): 1113-1125.
- [15] 杨德庆, 柳拥军, 金咸定. 薄板减振降噪的拓扑优化设计方法[J]. 船舶力学, 2003, 7(5): 91-96.
YANG Deqing, LIU Yongjun, JIN Xianding. Structural topology optimal design to reduce vibration and noise of thin plate[J]. Journal of Ship Mechanics, 2003, 7(5): 91-96.
- [16] SUZUKI S, MARUYAMA S, IDO H. Boundary element analysis of cavity noise problems with complicated boundary conditions[J]. Journal of Sound and Vibration, 1989, 130(1): 79-96.
- [17] WU T W, DANDAPANI A. A boundary element solution for sound transmission through thin panels[J]. Journal of Sound and Vibration, 1994, 171(2): 145-157.
- [18] COYETTE J P. The use of finite-element and boundary-element models for predicting the vibro-acoustic behaviour of layered structures[J]. Advances in Engineering Software, 1999, 30(2): 133-139.
- [19] DING W P, CHEN H L. A symmetrical finite element model for structure-acoustic coupling analysis of an elastic, thin-walled cavity[J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 243(3): 547-559.
- [20] 杜功焕, 朱哲民, 龚秀芬. 声学基础[M]. 南京: 南京大学出版社, 2001.
- [21] 常庚哲, 史济怀. 数学分析教程 下册[M]. 3版. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2013.
- [22] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1981.
- [23] 徐士良. FORTRAN 常用算法程序集[M]. 北京: 清华大学出版社, 1995.
- [24] JUNGER M C, FEIT D. Sound, structures, and their interaction[M]. 2nd Edition. Cambridge Massachusetts: The MIT Press, 1972.
- [25] 何祚镛, 赵玉芳. 声学理论基础[M]. 北京: 国防工业出版社, 1981.