引用格式：杨益新，张亚豪，杨龙．基于协方差矩阵拟合的宽带无网格波达角估计[J]．声学技术，2022，**41**(3)：306-312．[YANG Yixin, ZHANG Yahao, YANG Long. Wideband grid-free direction of arrival estimation based on covariance matrix fitting[J]. Technical Acoustics, 2022, **41**(3): 306-312.] **DOI**: 10.16300/j.cnki.1000-3630.2022.03.002

基于协方差矩阵拟合的宽带无网格波达角估计

杨益新[1,2]，张亚豪[1,2]，杨 龙[1,2]
(1. 西北工业大学航海学院，陕西西安 710072；2. 陕西省水下信息技术重点实验室，陕西西安 710072)

摘要：宽带波达角(Direction of Arrival, DOA)估计是声呐系统阵列信号处理中一个重要的研究方向。文章提出了一种基于相干子空间的改进稀疏与参数方法(Coherent Signal-subspace based Modified Sparse and Parameter Approach, C-MSPA)，以实现高精度和高空间方位分辨能力的宽带 DOA 估计。算法利用聚焦矩阵将各子带上的采样协方差矩阵投影至聚焦频率上。完成聚焦后，文章基于频率选择的范德蒙分解理论对协方差矩阵拟合准则进行改进，使重构的协方差矩阵中包含的 DOA 信息严格限制在聚焦区域内，最终对重构的协方差矩阵进行范德蒙分解，得到 DOA 估计值。所提出的算法无需选取正则参数，同时避免了基不匹配问题。仿真和湖上实测数据分析结果表明，所提出的方法实现了高空间方位分辨能力且提高了 DOA 估计精度。

关键词：宽带波达角估计；无网格稀疏重构；协方差矩阵拟合；聚焦矩阵
中图分类号：TN911.7 **文献标志码：**A **文章编号：**1000-3630(2022)-03-0306-07

Wideband grid-free direction of arrival estimation based on covariance matrix fitting

YANG Yixin[1,2], ZHANG Yahao[1,2], YANG Long[1,2]
(1. *School of Marine Science and Technology*, *Northwestern Polytechnical University*, *Xi'an* 710072, *Shaanxi*, *China*;
2. *Shaanxi Key Laboratory of Underwater Information Technology*, *Xi'an* 710072, *Shaanxi*, *China*)

Abstract: Wideband direction of arrival (DOA) estimation is an important research subject in sonar systems. In this paper, a coherent signal-subspace based modified sparse and parameter approach (C-MSPA) is proposed to achieve high-accuracy and high spatial azimuth resolution wideband DOA estimation. The proposed algorithm uses the focusing matrix to project the sample covariance matrix in each frequency bin onto the focusing frequency bin. After focusing, the covariance matrix fitting criterion is modified by the frequency-selective Vandermonde decomposition to reconstruct the covariance matrix where the DOAs encoded are restricted in the focusing sectors. Finally, the DOAs are estimated by performing the Vandermonde decomposition on the reconstructed covariance matrix. The proposed algorithm does not need to select regularization parameters and avoids the basis mismatch issue. The results of simulation and lake experiment show that the proposed method achieves high resolution and improves the DOA estimation accuracy.

Key words: wideband direction of arrival estimation; grid free sparse reconstruction; covariance matrix fitting; focusing matrix

0 引 言

宽带波达角(Direction of Arrival, DOA)估计是声呐系统阵列信号处理中一个非常重要的研究内容，目前比较流行的两类算法是非相干子空间法(Incoherent Signal-subspace Method, ISM)[1]和相干子空间法(Coherent Signal-subspace Method, CSM)[2]。ISM 将阵列接收信号通过离散傅里叶变换(Discrete Fourier Transform, DFT)划分至各个子带，在各子带内分别进行窄带 DOA 估计；CSM 通过聚焦矩阵将各子带的信号转换至聚焦频率上，DOA 估计问题从而转换至在聚焦频率上的窄带 DOA 估计。与 ISM 相比，CSM 在低信噪比(Signal to Noise Ratio, SNR)情况下性能更加稳健。

CSM 的核心是聚焦矩阵的设计，聚焦矩阵的性能直接影响 DOA 估计的精度。文献[2-4]给出了聚焦矩阵不同的构造方法以降低聚焦误差。这些算法需预先获得 DOA 信息作为聚焦角度来设计聚焦矩阵。因此，CSM 一般采用迭代的方式，以上一次迭代中的 DOA 估计值作为下一次迭代的聚焦角度。

收稿日期：2022-01-04；**修回日期：**2022-03-16
基金项目：国家自然科学基金(11974286、11904274)资助项目。
作者简介：杨益新(1975－)，男，江苏常熟人，博士，教授，研究方向为阵列信号处理。
通信作者：杨益新，E-mail: yxyang@nwpu.edu.cn

然而，当聚焦角度与真实 DOA 之间存在偏差时，将造成较大的聚焦误差。为提升聚焦矩阵对聚焦角度选取的稳健性，陈洪光等[5]将阵列流形中的角度变量和频率分离，仅对频率部分进行聚焦，避免了聚焦角度的选取，然而该方法产生的聚焦误差较大；Sellone[6]提出一种稳健聚焦矩阵，该算法可使聚焦角度周围扇区(即聚焦区域)的聚焦误差达到最小，因此无需得知 DOA 的精确信息，仅需 DOA 大致分布的先验信息即可，从而增强了对聚焦角度估计偏差的稳健性。

完成各子带的协方差矩阵聚焦后，现存方法一般采用子空间类算法如多重信号分类(Multiple Signal Classification, MUSIC)算法[7]和根 MUSIC (root MUSIC, rootMUSIC)[8]完成 DOA 估计。然而，子空间类算法对 SNR 要求较高。稀疏重构类算法[9-10]是近十几年内发展起来的高分辨 DOA 估计算法，相较于子空间类算法，这类算法可用于 SNR 更低的情况[9]，因此受到广泛的关注。大部分稀疏重构类算法在 DOA 估计时将空间划分为离散的网格，一般假设信号分布在该网格上。然而，当信号偏离网格时，DOA 估计精度会有所下降。为避免该问题，近年来针对直线阵阵形发展了许多无网格类稀疏重构算法，可分为原子范数类算法[11]和协方差矩阵拟合类算法[12]。其中，原子范数类算法利用原子范数作为稀疏惩罚项，可看作为 l_1 范数类算法向连续空间的推广。然而，这类算法需要选取合适的正则参数控制数据拟合误差和解的稀疏性之间的平衡；协方差矩阵拟合类算法，如稀疏与参数方法(Sparse and Parameter Approach, SPA)[12]，在协方差矩阵拟合准则下利用采样协方差矩阵估计真实协方差矩阵，对所估计的协方差矩阵进行范德蒙分解(Vandermonde Decomposition, VD)[13]以获取阵列流形的估计值，并从中得到 DOA 估计值。相较于原子范数类算法，协方差矩阵拟合类算法无需选取正则参数，因此更易用于实际的信号处理中。

本文将 SPA 算法推广至宽带 DOA 估计中，提出一种基于 CSM 的改进 SPA(Coherent Signal-subspace based Modified SPA, C-MSPA)算法，以在低 SNR 情况下获得高 DOA 估计精度。算法首先采用稳健聚焦矩阵[6]将各子带的信号投影至聚焦频率上，而在设计聚焦矩阵时则利用了信号空间分布的先验信息。为提升 DOA 估计对聚焦矩阵输出的稳健性，本文基于频率选择的 VD(Frequency-selective VD, FS-VD)原理[14]对协方差矩阵拟合准则进行改进，使得在新准则下重构的协方差矩阵中包含的 DOA 信息严格限制在聚焦区域上，从而在 DOA 估计时也有效利用了 DOA 分布的先验信息。通过仿真和湖上实测数据分析可以看出，与基于 ISM 的 SPA(Incoherent Signal-subspace based SPA, I-SPA)算法和其他基于 CSM 的无网格类算法相比，C-MSPA 算法实现了高空间方位分辨能力且提高了 DOA 估计精度。

1　信号模型建立

假设 K 个非相关信号从 $\boldsymbol{\theta}=[\theta_1\ \ \theta_2\ \ \cdots\ \ \theta_K]^{\mathrm{T}}$ 入射至 M 元均匀线列阵(Uniform Linear array, ULA)，信号的中心频率为 f_{c}，带宽为 H。将阵列接收信号划分为 N 段，在每一段内进行 L 点的 DFT，从而将时域信号转换至频域。在第 l 个子带上，指向角度 θ 的阵列流形为

$$\boldsymbol{a}(f_l,\theta)=\left[1\ \ \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi d\cos\theta/\lambda_l}\ \ \cdots\ \ \mathrm{e}^{\mathrm{j}(M-1)2\pi d\cos\theta/\lambda_l}\right]^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

式中：f_l 和 λ_l 分别表示第 l 个子带的中心频率和对应的波长；d 为阵元间距。第 l 个子带上阵列接收信号可建模为

$$\boldsymbol{x}_l(n)=\boldsymbol{A}_l(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{s}_l(n)+\boldsymbol{e}_l(n),\ n=1,\cdots,N \tag{2}$$

式中：$\boldsymbol{x}_l(n)\in\mathbb{C}^{M\times 1}$，$\boldsymbol{s}_l(n)\in\mathbb{C}^{K\times 1}$ 以及 $\boldsymbol{e}_l(n)\in\mathbb{C}^{M\times 1}$ 分别表示第 n 段阵列接收信号、目标信号以及环境噪声在第 l 个子带上的 DFT 系数；$\boldsymbol{A}_l(\boldsymbol{\theta})=[\boldsymbol{a}(f_l,\theta_1)\ \cdots\ \boldsymbol{a}(f_l,\theta_K)]\in\mathbb{C}^{M\times K}$ 表示阵列流形矩阵；N 为频域快拍数。

假设噪声为均匀高斯白噪声，且与信号不相关，则第 l 个子带上阵列接收信号的协方差矩阵 $\boldsymbol{R}_l\in\mathbb{C}^{M\times M}$ 为

$$\boldsymbol{R}_l=\mathrm{E}\left[\boldsymbol{x}_l(n)\boldsymbol{x}_l^{\mathrm{H}}(n)\right]=\boldsymbol{A}_l(\boldsymbol{\theta})\,\mathrm{diag}\left(\left[p_{l1}\ \cdots\ p_{lK}\right]^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{A}_l^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{\theta})+\sigma_l\boldsymbol{I}_M \tag{3}$$

式中：p_{lk} 和 σ_l 分别为第 l 个子带上第 k 个信号功率和噪声功率；$\boldsymbol{I}_M$ 表示维度为 $M\times M$ 的单位矩阵；$\mathrm{diag}(\boldsymbol{x})$ 表示以向量 $\boldsymbol{x}$ 为对角线元素的对角矩阵；$\mathrm{E}[\cdot]$ 表示期望算子。在实际信号处理中，真实的协方差矩阵一般难以获取。因此，采用采样协方差矩阵来近似。采样协方差矩阵的计算公式为

$$\hat{\boldsymbol{R}}_l=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{x}_l(n)\boldsymbol{x}_l^{\mathrm{H}}(n) \tag{4}$$

2　算法原理

2.1　稳健聚焦矩阵设计

聚焦矩阵的设计原理是将频率 $f_l(l=1,\cdots,L)$ 上的信号子空间转变为聚焦频率 f_0 上的信号子空间，则第 l 个子带上聚焦矩阵的设计问题表示为[3]

$$\min_{\boldsymbol{T}_l}\left\|\boldsymbol{T}_l\boldsymbol{A}_l(\boldsymbol{\theta})-\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{\theta})\right\|_{\mathrm{F}}^2$$
$$\text{subject to } \boldsymbol{T}_l^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}_l=\boldsymbol{I}_M \tag{5}$$

式中：$\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{\theta})=[\boldsymbol{a}(f_0,\theta_1)\ \cdots\ \boldsymbol{a}(f_0,\theta_K)]$；$\|\bullet\|_{\mathrm{F}}$ 为 Frobenius 范数。优化式(5)的解为[3]

$$\boldsymbol{T}_l=\boldsymbol{V}_l\boldsymbol{U}_l^{\mathrm{H}} \tag{6}$$

式中：$\boldsymbol{U}_l\in\mathbb{C}^{M\times M}$ 和 $\boldsymbol{V}_l\in\mathbb{C}^{M\times M}$ 分别表示矩阵 $\boldsymbol{A}_l(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{\theta})\in\mathbb{C}^{M\times M}$ 的左、右奇异矩阵。

在各子带内完成聚焦后，聚焦频率上的协方差矩阵计算为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_0&=\sum_{l=1}^{L}\boldsymbol{T}_l\boldsymbol{R}_l\boldsymbol{T}_l^{\mathrm{H}}\approx\\&\sum_{l=1}^{L}\left\{\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{\theta})\operatorname{diag}\left([p_{l1}\ \cdots\ p_{lK}]^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{\theta})+\sigma_l\boldsymbol{I}_M\right\}=\\&\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{\theta})\operatorname{diag}\left([p_1\ \cdots\ p_K]^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{\theta})+\sigma\boldsymbol{I}_M=\\&\sum_{k=1}^{K}p_k\boldsymbol{a}(f_0,\theta_k)\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(f_0,\theta_k)+\sigma\boldsymbol{I}_M\end{aligned} \tag{7}$$

式中：$p_k=\sum_{l=1}^{L}p_{lk},k=1,\cdots,K$；$\sigma=\sum_{l=1}^{L}\sigma_l$。显然，式(7)中，矩阵 $\boldsymbol{R}_0$ 为 Toeplitz 矩阵，可表示为

$$\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})+\sigma\boldsymbol{I}_M=\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}_k)+\sigma\boldsymbol{I}_M \tag{8}$$

式中：$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}_k)=p_k\boldsymbol{a}(f_0,\theta_k)\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(f_0,\theta_k)$，$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}_k)$ 表示第一行元素为向量 $\boldsymbol{u}_k=[(u_k)_0\ \cdots\ (u_k)_{M-1}]^{\mathrm{T}}$ 的 Toeplitz 矩阵，其具体形式为

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}_k)=\begin{bmatrix}(u_k)_0 & (u_k)_1 & \cdots & (u_k)_{M-1}\\(u_k)_1^{*} & (u_k)_0 & \cdots & (u_k)_{M-2}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\(u_k)_{M-1}^{*} & (u_k)_{M-2}^{*} & \cdots & (u_k)_0\end{bmatrix} \tag{9}$$

式中：上标“*”为共轭符号；$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})$ 表示第一行元素为向量 $\boldsymbol{u}=\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{u}_k=[u_0\ \cdots\ u_{M-1}]^{\mathrm{T}}$ 的 Toeplitz 矩阵。

考虑到优化式(5)中的 $\boldsymbol{\theta}$ 难以获得，CSM 一般采用迭代的方式进行 DOA 估计，在第 i 次迭代中采用上一次迭代中的 DOA 估计值 $\boldsymbol{\theta}^{(i-1)}$ 作为聚焦角度，其中上标$(i-1)$表示第$(i-1)$次迭代。迭代初始的聚焦角度 $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ 由传统算法如常规波束形成(Conventional Beamforming, CBF)[15]提供。然而，当 $\boldsymbol{\theta}^{(i-1)}$ 和 $\boldsymbol{\theta}$ 之间存在较大的偏差时，将导致聚焦误差较大，影响后续 DOA 估计的精度。

为增强聚焦矩阵对聚焦角度选择的稳健性，文献[6]对聚焦矩阵的构造方法进行了改进。考虑到 $\boldsymbol{A}_l(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{\theta})$ 是一个秩亏矩阵，仅有 K 个非零奇异值。因此，与非零奇异值对应的左、右奇异向量 $\boldsymbol{U}_{l1},\boldsymbol{V}_{l1}\in\mathbb{C}^{M\times K}$ 是唯一确定的，剩余的奇异向量 $\boldsymbol{U}_{l2},\boldsymbol{V}_{l2}\in\mathbb{C}^{M\times(M-K)}$ 则不是唯一的，其中 $\boldsymbol{U}_l=[\boldsymbol{U}_{l1}\ \boldsymbol{U}_{l2}]\in\mathbb{C}^{M\times M}$，$\boldsymbol{V}_l=[\boldsymbol{V}_{l1}\boldsymbol{V}_{l2}]\in\mathbb{C}^{M\times M}$。根据这一特性，文献[6]对 $\boldsymbol{U}_{l2}$ 和 $\boldsymbol{V}_{l2}$ 进行重构，使聚焦矩阵在聚焦角度周围区域的聚焦误差最小。在第 i 次迭代中，优化问题表示为[6]

$$\min_{\boldsymbol{U}_{l2},\boldsymbol{V}_{l2}}\sum_{k=1}^{K}\int_{\Theta_k^{(i)}}\left\|\boldsymbol{T}_l^{(i)}\boldsymbol{a}(f_l,\theta)-\boldsymbol{a}(f_0,\theta)\right\|_2^2\mathrm{d}\theta$$
$$\text{subject to }\begin{cases}\boldsymbol{U}_{l2}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}_{l2}=\boldsymbol{I}_{M-K},\ \left(\boldsymbol{U}_{l1}^{(i)}\right)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}_{l2}=\boldsymbol{0}_{M-K}\\\boldsymbol{V}_{l2}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V}_{l2}=\boldsymbol{I}_{M-K},\ \left(\boldsymbol{V}_{l1}^{(i)}\right)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V}_{l2}=\boldsymbol{0}_{M-K}\end{cases} \tag{10}$$

式中：$\boldsymbol{T}_l^{(i)}=\boldsymbol{V}_{l1}^{(i)}\left(\boldsymbol{U}_{l1}^{(i)}\right)^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{V}_{l2}\boldsymbol{U}_{l2}^{\mathrm{H}}$；$\boldsymbol{U}_{l1}^{(i)}$ 和 $\boldsymbol{V}_{l1}^{(i)}$ 分别为 $\boldsymbol{A}_l(\boldsymbol{\theta}^{(i-1)})\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{\theta}^{(i-1)})$ 非零奇异值对应的左、右奇异向量；$\Theta_k^{(i)}=\left[\Theta_{k\mathrm{L}}^{(i)},\Theta_{k\mathrm{H}}^{(i)}\right]=\left[\theta_k^{(i-1)}-B/2^i,\theta_k^{(i-1)}+B/2^i\right]$ 为以聚焦角度 $\theta_k^{(i-1)}$ 为中心、宽度为 $B/2^{i-1}$ 的扇区，B 为迭代初始时设定的扇区宽度，$\Theta_{k\mathrm{L}}^{(i)}$ 和 $\Theta_{k\mathrm{H}}^{(i)}$ 为区间 $\Theta_k^{(i)}$ 的左右边界；$\|\bullet\|_2$ 为 2 范数。优化式(10)的解为[6]

$$\boldsymbol{V}_{l2}\boldsymbol{U}_{l2}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{V}_{l2}^{(i)}\boldsymbol{F}\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{U}_{l2}^{(i)}\right)^{\mathrm{H}} \tag{11}$$

式中：$\boldsymbol{U}_{l2}^{(i)}$ 和 $\boldsymbol{V}_{l2}^{(i)}$ 分别为 $\boldsymbol{A}_l\left(\boldsymbol{\theta}^{(i-1)}\right)\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{\theta}^{(i-1)}\right)$ 的零奇异值所对应的左、右奇异向量；矩阵 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 是 $\left(\boldsymbol{V}_{l2}^{(i)}\right)^{\mathrm{H}}\sum_{k=1}^{K}\int_{\Theta_k^{(i)}}\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(f_l,\theta)\boldsymbol{a}(f_0,\theta)\mathrm{d}\theta\boldsymbol{U}_{l2}^{(i)}$ 的左、右奇异矩阵。因此，第 i 次迭代中聚焦矩阵为

$$\boldsymbol{T}_l^{(i)}=\boldsymbol{V}_{l1}^{(i)}\left(\boldsymbol{U}_{l1}^{(i)}\right)^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{V}_{l2}^{(i)}\boldsymbol{F}\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{U}_{l2}^{(i)}\right)^{\mathrm{H}} \tag{12}$$

2.2 修正稀疏与参数方法

SPA 算法的原理是在协方差矩阵拟合准则下基于采样协方差矩阵重构真实协方差矩阵。聚焦后的协方差矩阵见式(8)。第 i 次迭代中聚焦后的采样协方差矩阵表示为

$$\hat{\boldsymbol{R}}_0^{(i)}=\sum_{l=1}^{L}\boldsymbol{T}_l^{(i)}\hat{\boldsymbol{R}}_l\left(\boldsymbol{T}_l^{(i)}\right)^{\mathrm{H}} \tag{13}$$

基于此，SPA 算法表示为[12]

$$\min_{\boldsymbol{Q},\boldsymbol{u},\sigma\geq0}\operatorname{tr}(\boldsymbol{Q})+\operatorname{tr}\left[\left(\hat{\boldsymbol{R}}_0^{(i)}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})+\sigma\boldsymbol{I}_M\right)\right]$$
$$\text{subject to }\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q} & \left(\hat{\boldsymbol{R}}_0^{(i)}\right)^{-1/2}\\\left(\hat{\boldsymbol{R}}_0^{(i)}\right)^{-1/2} & \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})+\sigma\boldsymbol{I}_M\end{bmatrix}\succeq0,\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})\succeq0 \tag{14}$$

式中：$\operatorname{tr}(\bullet)$ 表示求矩阵的迹；$\succeq$ 表示半正定符号。该问题为凸优化问题，可由 CVX 工具箱[16]求解。完成式(14)中优化问题的求解后，协方差矩阵的估计量记为

$$\boldsymbol{R}_0^{(i)}=\boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{u}^{(i)}\right)+\sigma^{(i)}\boldsymbol{I}_M \tag{15}$$

通过 VD 后，矩阵 $\boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{u}^{(i)}\right)$ 可分解为

$$\boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{u}^{(i)}\right)=\boldsymbol{A}_0\left(\boldsymbol{\theta}^{(i)}\right)\operatorname{diag}\left(\left[p_1^{(i)}\ \cdots\ p_K^{(i)}\right]^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{\theta}^{(i)}\right) \tag{16}$$

从 $\boldsymbol{A}_0\left(\boldsymbol{\theta}^{(i)}\right)$ 中可很容易获得第 i 次迭代中的 DOA 估计值 $\boldsymbol{\theta}^{(i)}$。

求解聚焦矩阵时利用了信号分布在区域 $\Theta_1^{(i)}\cup\cdots\cup\Theta_K^{(i)}$ 这一先验信息。然而，式(14)中的优化问题并没有利用到这一先验信息。为了提升 SPA 算

法的稳健性，下面利用 FS-VD[14]对式(14)中的优化问题进行修正，使得 $\boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{u}^{(i)}\right)$ 所包含的 DOA 信息严格限制在聚焦区域上。

文献[14]中已证明，对于任意半正定 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})=\sum_{k=1}^{K}\alpha_k\boldsymbol{a}_k\boldsymbol{a}_k^{\mathrm{H}}\in\mathbb{C}^{M\times M}$，其中 $\boldsymbol{a}_k=\left[1\ \ \mathrm{e}^{\mathrm{j}w_k}\ \ \cdots\ \ \mathrm{e}^{\mathrm{j}(M-1)w_k}\right]^{\mathrm{T}}$，如果 $w_k,k=1,\cdots,K$ 严格限制在区间 $[w_{\mathrm{L}},w_{\mathrm{H}}]$ 中，则存在 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{T}(\hat{\boldsymbol{u}})\in\mathbb{C}^{(M-1)\times(M-1)}$ 为半正定的，其中 $\hat{\boldsymbol{u}}=[\hat{u}_0\ \ \cdots\ \ \hat{u}_{M-2}]^{\mathrm{T}}$ 的定义为

$$\hat{u}_n=r_1u_n+r_0u_{n-1}+r_{-1}u_{n-2},n=0,\cdots,M-2 \tag{17}$$

式中：

$$\begin{cases}u_{-1}=u_1^*\\ r_0=-2\cos[(w_{\mathrm{H}}-w_{\mathrm{L}})/2]\\ r_1=\exp[\mathrm{j}(w_H+w_L)/2]\\ r_{-1}=r_1^*\end{cases} \tag{18}$$

下面将该定理推广至 DOA 估计当中。若使 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}_k)$ 中的 DOA 信息 θ_k 限制在区域 $\Theta_k^{(i)}=\left[\Theta_{k\mathrm{L}}^{(i)},\Theta_{k\mathrm{H}}^{(i)}\right]$，存在一个半正定的 Toeplitz 矩阵 $\mathrm{T}(\hat{\boldsymbol{u}}_k)$。此时，$w_{\mathrm{L}}$ 和 w_{H} 分别相当于 $2\pi d\cos\left(\Theta_{k\mathrm{L}}^{(i)}\right)/\lambda_0$ 和 $2\pi d\cos\left(\Theta_{k\mathrm{H}}^{(i)}\right)/\lambda_0$，其中 λ_0 为聚焦频率 f_0 对应的波长。将其代入至式(18)，向量 $\hat{\boldsymbol{u}}_k=\left[(\hat{u}_k)_0\ \ \cdots\ \ (\hat{u}_k)_{M-2}\right]^{\mathrm{T}}$ 中的元素计算为

$$(\hat{u}_k)_n=\hat{r}_1(\hat{u}_k)_n+\hat{r}_0(\hat{u}_k)_{n-1}+\hat{r}_{-1}(\hat{u}_k)_{n-2},\quad n=0,\cdots,M-2 \tag{19}$$

式中：

$(\hat{u}_k)_{-1}=(\hat{u}_k)_1^*$；

$\hat{r}_0=-2\cos\left\{\pi d\left[\cos\left(\Theta_{k\mathrm{H}}^{(i)}\right)-\cos\left(\Theta_{k\mathrm{L}}^{(i)}\right)\right]/\lambda_0\right\}$；

$\hat{r}_1=\exp\left\{\mathrm{j}\pi d\left[\cos\left(\Theta_{k\mathrm{H}}^{(i)}\right)+\cos\left(\Theta_{k\mathrm{L}}^{(i)}\right)\right]/\lambda_0\right\}$；

$\hat{r}_{-1}=\hat{r}_1^*$。

基于此，式(14)中的优化问题可修正为

$$\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{Q},\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_K\},\sigma\ge0}\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q})+\mathrm{tr}\left\{\left(\hat{\boldsymbol{R}}_0^{(i)}\right)^{-1}\left(\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}_k)+\sigma\boldsymbol{I}_M\right)\right\}\\ &\text{subject to}\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}&\left(\hat{\boldsymbol{R}}_0^{(i)}\right)^{-1/2}\\ \left(\hat{\boldsymbol{R}}_0^{(i)}\right)^{-1/2}&\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{T}(\mathbf{u}_k)+\sigma\boldsymbol{I}_M\end{bmatrix}\succeq0,\\ &\boldsymbol{T}(\mathbf{u}_k)\succeq0,\boldsymbol{T}(\hat{\mathbf{u}}_k)\succeq0,k=1,\cdots,K\end{aligned} \tag{20}$$

该问题同样可通过 CVX 工具箱求解。完成求解后，所估计的协方差矩阵表示为

$$\boldsymbol{R}_0^{(i)}=\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{u}_k^{(i)}\right)+\sigma^{(i)}\boldsymbol{I}_M \tag{21}$$

对其进行 VD，得到的 DOA 估计值 $\boldsymbol{\theta}^{(i)}$ 严格限制在区域 $\Theta_1^{(i)}\cup\cdots\cup\Theta_K^{(i)}$ 内。

当相邻两次迭代得到的 DOA 估计值满足 $\left\|\boldsymbol{\theta}^{(i)}-\boldsymbol{\theta}^{(i-1)}\right\|_2\le\varepsilon$ 时(ε 为计算精度)，迭代停止。显然，由于每次迭代时聚焦区域在不断减小，因此相邻两次迭代中 DOA 估计值的差异一定在不断减小，从而保证了 C-MSPA 算法的收敛性。

3　仿真分析

下面进行仿真实验。仿真中考虑阵元数为 5 的 ULA，阵元间距为 0.3 m，两个中心频率为 2.5 kHz、带宽为 1 kHz 的宽带远场目标信号入射至阵列。目标 1 的 DOA 为 80.3°，目标 2 的 DOA 为 95.2°。阵列的采样率为 104 kHz。将接收信号均匀划分为 10 段，即 N=10，每一段包含 10 400 个快拍。每一段内进行 10 400 点的 DFT，将时域信号转换至频域，即频率分辨率为 10 Hz。分别采用 C-MSPA 算法、基于 CSM 的 SPA 算法(Coherent Signal-subspace based SPA, C-SPA)、基于 CSM 的 rootMUSIC 算法(Coherent Signal-subspace based rootMUSIC, C-rootMUSIC)以及 I-SPA 算法进行 DOA 估计。为了保证聚焦矩阵对聚焦角度的稳健性，各基于 CSM 的算法中聚焦矩阵均由式(12)计算。迭代初始的聚焦角度由 CBF 算法给出，聚焦区域的初始宽度 B 设定为 CBF 的 3 dB 波束宽度。聚焦频率设定为 2.5 kHz，迭代终止条件设定为 ε=0.01。

分别从 DOA 估计精度以及分辨概率两方面对各算法性能进行比较。其中，DOA 估计精度由均方根误差(Root Mean Square Error, RMSE)来衡量，计算公式为

$$R_{\mathrm{MSE}}=\sqrt{\frac{1}{KG}\sum_{k=1}^{K}\sum_{g=1}^{G}\left(\hat{\theta}_k^g-\theta_k\right)^2} \tag{22}$$

式中：$\hat{\theta}_k^g$ 表示第 g 次蒙特卡洛实验时第 k 个信号的 DOA 估计结果；G 表示蒙德卡洛实验的总次数，在仿真中 G 设置为 200。在第 g 次蒙德卡洛实验中，若 DOA 估计值满足：

$$\sum_{k=1}^{2}\left|\hat{\theta}_k^g-\theta_k\right|\le|\theta_1-\theta_2| \tag{23}$$

则称两个目标被成功分辨[17]，式中的 θ_1 和 θ_2 分别表示目标 1 和目标 2 的真实 DOA。

图 1 和图 2 分别给出各算法的 RMSE 和分辨概率随 SNR 的变化曲线。由图 1、2 可以看出，C-MSPA 算法在 SNR 小于−10 dB 时的 DOA 估计精度和分辨概率都优于其他算法。主要原因是 C-MSPA 算法在进行 DOA 估计时利用了信号分布的先验信息，增强了其对噪声的稳健性。相较于传统的高分辨算法，稀疏重构类算法对 SNR 的要求较低，C-MSPA 和 C-SPA 的 DOA 估计精度在 SNR 小于 0 dB 时优于 C-rootMUSIC，同时分辨概率在

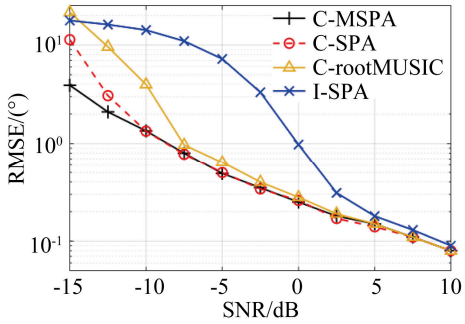


图 1 各算法 DOA 估计的 RMSE 随 SNR 的变化
Fig.1 RMSE of each method versus SNR

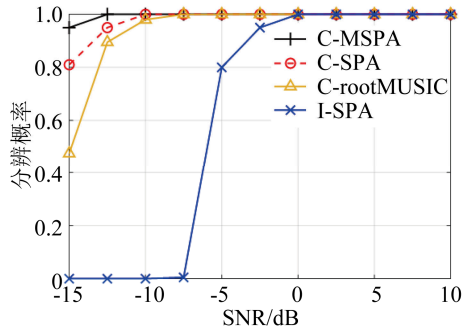


图 2 各算法的分辨概率随 SNR 的变化
Fig.2 Resolution probability of each method versus SNR

SNR 小于−7.5 dB 时也高于 C-rootMUSIC。I-SPA 算法在各个子带内独立进行 DOA 估计，并将各子带的 DOA 估计结果进行平均。若某一子带的估计结果偏差较大，对该算法的估计精度会有很大影响。因此，与基于 CSM 的算法相比，I-SPA 算法对 SNR 的要求较高。当 SNR 大于 0 dB 时，I-SPA 算法的性能才慢慢接近其他算法。

为了对比算法的空间方位分辨能力，固定目标 1，将目标 2 从 85.2°，以 2°为步长移动至 99.2°，即两个目标之间的角度间隔从 5°变化至 19°。SNR 设定为−5 dB，其他仿真条件不变。

图 3、4 分别给出了 RMSE 和分辨概率随角度间隔的变化曲线。由图 3、4 中可知，C-MSPA 算法在目标角度间隔小于 9°时的 RMSE 和分辨概率均优于其他算法，说明当 DOA 估计时考虑信号分布的先验信息有效提升了算法的空间方位分辨能力。由于稀疏重构类算法利用信号在空间分布的稀疏性，获得了更高的空间方位分辨能力，因此 C-MSPA 和 C-SPA 算法在目标小角度间隔情况下的 RMSE 和分辨概率均优于 C-rootMUSIC。由图 1、2 可知，I-SPA 算法对 SNR 的要求较高。由于在该仿真条件下设置的 SNR 较低，导致 I-SPA 算法在所有考虑的角度间隔情况下 RMSE 均大于其他算法，同时其分辨概率也小于 1。由此也可说明将各子带相干处理相较于非相干处理可有效提升算法性能。

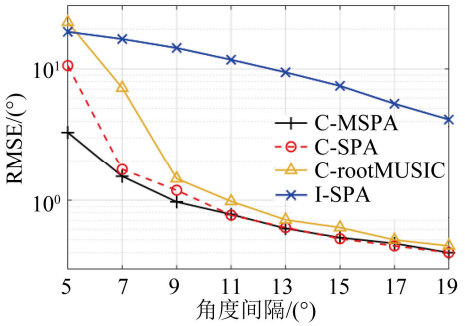


图 3 各算法的 RMSE 随角度间隔的变化
Fig.3 RMSE of each method versus angle separation

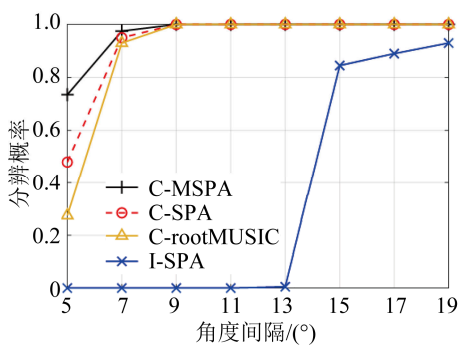


图 4 各算法的分辨概率随角度间隔的变化
Fig.4 Resolution probability of each method versus angle separation

4 实验分析

为了验证 C-MSPA 算法的性能，对实验数据进行处理和分析。实验数据来源于 2016 年在新安江水库试验站进行的湖上实验，湖深约为 60 m。实验设备布放如图 5 所示。

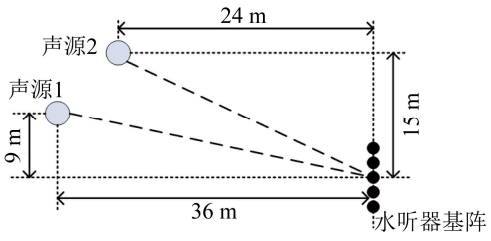


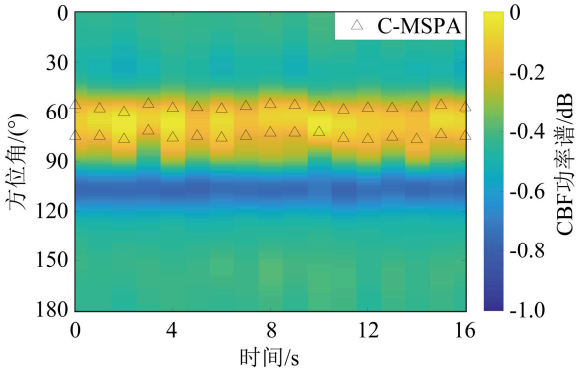
图 5 实验设备布放图
Fig.5 The layout of experimental equipment

实验中，接收阵为一条自制的 5 阵元 ULA，阵元间距为 0.3 m，水平放置在水下。实验采用两个声源，其中声源 1 为低频宽带声源 UW350，声源 2 为溢流环。根据几何关系可以算出，声源 1 的方位角大致为 75°，声源 2 的方位角大致为 57°。两个声源同时发射中心频率为 2.5 kHz、带宽为 1 kHz 的宽带信号，持续时间为 17 s。接收阵列以 104 kHz 的采样率采集信号。将接收到的信号划分为 17 组，每一组持续时间为 1 s。将每组信号划分为 10 段，

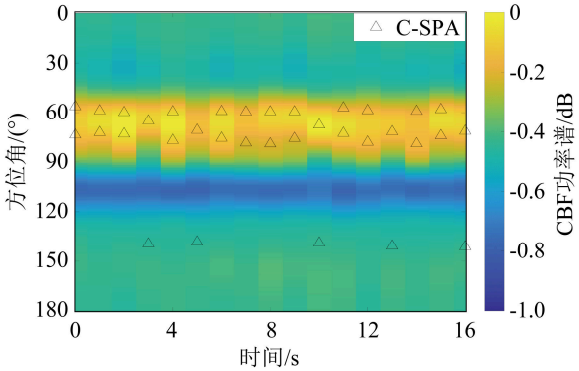
即 N=10，在每一段中进行 10 400 点的 DFT，即频率分辨率为 10 Hz。

采用第 3 节仿真中的算法对每一组数据进行 DOA 估计，其余的参数设置与仿真中一致，DOA 估计结果如图 6 所示。考虑到 CBF 算法的稳健性，图 6 同时给出了 CBF 的估计结果作为参考。图 6 中背景色即为 CBF 的估计结果，三角符号则为各无网格算法的估计结果。

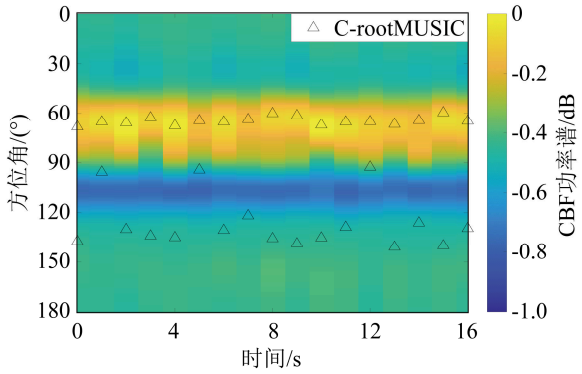
从图 6 中可以看出，由于 CBF 算法的分辨能力较低，无法分辨出两个目标，但从结果中可以看出，在区间[50，80]°存在目标。C-MSPA 算法在 DOA 估计时利用了信号大致分布的先验信息，该算法可以很好地估计出两个目标。C-SPA 算法在 DOA 估计时则没有考虑信号的分布情况，其在某些时刻的 DOA 估计值存在较大偏差。与 C-MSPA 和 C-SPA 算法将各子带进行相干处理不同，I-SPA 算法是在各个频点上进行非相干 DOA 估计。由于部分子带内的估计结果存在较大偏差，导致该算法无法成功分辨出两个目标。相较于稀疏重构类算法，C-rootMUSIC 算法对 SNR 要求较高，同时空间方位分辨能力弱于稀疏重构类算法，该算法也无法很好地估计出两个目标信号。通过对实验数据的处理，验证了所提出的算法在宽带 DOA 估计中的优异性能。



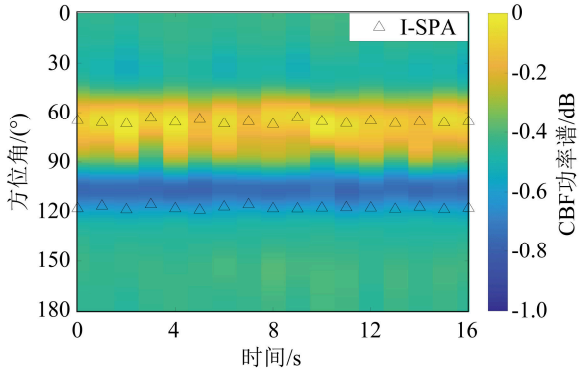
(a) C-MSPA 算法的估计结果



(b) C-SPA 算法的估计结果



(c) C-rootMUSIC 算法的估计结果



(d) I-SPA 算法的估计结果

图 6　各算法的 DOA 估计结果

Fig.6　DOA estimation results of each method

5　结　论

本文将协方差矩阵拟合类无网格 DOA 估计算法推广至宽带情况。算法首先利用聚焦矩阵将各子带的数据转移至聚焦频率上，以进行相干 DOA 估计。不同于已有协方差矩阵拟合类算法，本文对协方差矩阵拟合准则进行改进，以利用 DOA 分布的先验信息，使在该准则下重构的协方差矩阵中所包含的 DOA 信息严格限制在聚焦区域内。仿真和实验数据处理结果表明，与基于 ISM 的无网格算法相比，本文所提出的算法通过聚焦矩阵对各个子带进行相干处理；相较于其他基于 CSM 的无网格类算法，所提出的算法在 DOA 估计时利用了 DOA 分布的先验信息，实现了较高的空间方位分辨能力且提高了 DOA 估计的精度。

参　考　文　献

[1] WAX M, SHAN T J, KAILATH T. Spatio-temporal spectral analysis by eigenstructure methods[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1984, **32**(4): 817-827.

[2] WANG H, KAVEH M. Coherent signal-subspace processing for the detection and estimation of angles of arrival of multiple wide-band sources[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech,

and Signal Processing, 1985, **33**(4): 823-831.

[3] HUNG H, KAVEH M. Focussing matrices for coherent signal-subspace processing[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1988, **36**(8): 1272-1281.

[4] 雷中定，黄绣坤，张树京. 宽带波达方向估计新方法及性能分析[J]. 电子学报, 1998, **26**(3): 58-62.
LEI Zhongding, HUANG Xiukun, ZHANG Shujing. A new method to wideband DOA estimates and its performance analysis[J]. Acta Electronica Sinica, 1998, **26**(3): 58-62.

[5] 陈洪光，余圣发，沈振康. 基于一致聚焦的宽带信号波达方向估计[J]. 通信学报, 2006, **27**(1): 64-68.
CHEN Hongguang, YU Shengfa, SHEN Zhenkang. Direction finding method for wideband signals base on consistent focusing[J]. Journal on Communications, 2006, **27**(1): 64-68.

[6] SELLONE F. Robust auto-focusing wideband DOA estimation[J]. Signal Processing, 2006, **86**(1): 17-37.

[7] SCHMIDT R. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1986, **34**(3): 276-280.

[8] RAO B D, HARI K V S. Performance analysis of root-music[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1989, **37**(12): 1939-1949.

[9] GERSTOFT P, XENAKI A, MECKLENBRÄUKER C F. Multiple and single snapshot compressive beamforming[J]. J. Acoust. Soc. Am., 2015, **138**(4): 2003-2014.

[10] 杨龙，杨益新，汪勇，等. 一种改进的稀疏近似最小方差 DOA 估计算法研究[J]. 声学学报, 2016, **41**(4): 465-476.
YANG Long, YANG Yixin, WANG Yong, et al. Direction-of-arrival estimation of a modified sparse asymptotic minimum variance approach[J]. Acta Acustica, 2016, **41**(4): 465-476.

[11] XENAKI A, GERSTOFT P. Grid-free compressive beamforming[J]. J. Acoust. Soc. Am., 2015, **137**(4): 1923-1935.

[12] YANG Z, XIE L H, ZHANG C S. A discretization-free sparse and parametric approach for linear array signal processing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, **62**(19): 4959-4973.

[13] YANG Z, XIE L H. On gridless sparse methods for line spectral estimation from complete and incomplete data[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, **63**(12): 3139-3153.

[14] YANG Z, XIE L H. Frequency-selective vandermonde decomposition of toeplitz matrices with applications[J]. Signal Processing, 2018, **142**: 157-167.

[15] KRIM H, VIBERG M. Two decades of array signal processing research: the parametric approach[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 1996, **13**(4): 67-94.

[16] GRANT M, BOYD S. CVX: Matlab software for disciplined convex programming, cersion 2.0 beta[Z/OL]. [2021-11-09]. http://cvxr.com /cvx.

[17] 鄢社锋，侯朝焕，马晓川. 矩阵空域预滤波目标方位估计[J]. 声学学报, 2007, **32**(2): 151-157.
YAN Shefeng, HOU Chaohuan, MA Xiaochuan. Matrix spatial prefiltering approach for direction-of-arrival estimation[J]. Acta Acustica, 2007, **32**(2): 151-157.